Exame Nacional de 2017 (2.ª fase)

Prova Escrita de Matemática A
12.º Ano de Escolaridade
Prova 635/Versões 1 e 2

Grupo I

Itens	Versão 1	Versão 2
1.	(B)	(D)
2.	(D)	(B)
3.	(C)	(A)
4.	(B)	(C)
5.	(C)	(B)
6.	(A)	(B)
7.	(C)	(A)
8.	(B)	(D)

Justificações:

1. Sendo P um algarismo par e I um ímpar, as possibilidades são da forma PPIII, IPPII, IIPPI e IIIPP, logo existem $2! \times 3! \times 4 = 48$.

2. $P(X > 1 | X \leq 3) = \dfrac{P(X > 1 \cap X \leq 3)}{P(X \leq 3)} = \dfrac{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \dfrac{\frac{5}{12}}{\frac{9}{12}} = \dfrac{5}{9}$

3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{f(x) - f(2)} = 4 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x(x-2)}{f(x) - f(2)} = 4 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} \times \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow f'(2) \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow f'(2) = \dfrac{1}{2}$

4. $(g \circ f)(x) = 0 \Leftrightarrow g[f(x)] = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{2 \text{ é zero de } g} f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$

5. $g(x) = -f(x-5) \rightarrow$ o gráfico de g obtém-se aplicando ao de f uma translação associada ao vetor (5,0), seguida de uma reflexão de eixo Ox.

x	$-\infty$	-10		0		10	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cap$	P.I.	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

x	$-\infty$	-5		5		15	$+\infty$
$-g$	$\cap$	P.I.	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$
g	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$	P.I.	$\cap$

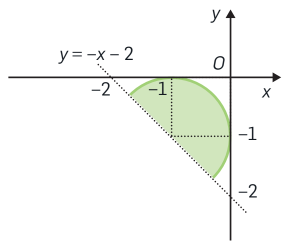
$\therefore$ o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $]-5, 5[$ e em $]15, +\infty[$.

6. $\arg(-5iz) = \arg(-5i) + \arg(z) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} = -\frac{3\pi}{10}$

7. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 1 \rightarrow$ círculo de centro $(-1, -1)$ e raio 1;

$x + y + 2 \geq 0 \Leftrightarrow y > = -x - 2 \rightarrow$ semiplano fechado superior determinado pela reta de equação $y = -x -2$.

Assim, o perímetro da região dada é igual à soma do diâmetro do círculo (2) com o seu semiperímetro $\frac{2 \times \pi \times 1}{2}$, ou seja, π.



8. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n} = (2^{-1})^{1-n} = 2^{n-1}$; termos de (u_n): 1, 2, 4, 8,… ou seja, cada termo obtém-se multiplicando o anterior por 2, pelo que (u_n) é uma progressão geométrica de razão 2.

Grupo II

1. $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1 + i$

$z_1 \times \overline{z_2} = 4 - 3i \rightarrow \overline{z_2} = \frac{4-3i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{8-4i-6i-3}{2^2+1^2} = \frac{5-10i}{5} = 1 - 2i$

$\therefore z_2 = 1 + 2i$

$\therefore |z - z_1| = |z - z_2| \Leftrightarrow |z - 2 - i| = |z - 1 - 2i|$

$1 + i$ verifica a condição dada, pois:

$|1 \cancel{+ i} - 2 \cancel{- i}| = |\cancel{1} + i \cancel{- 1} - 2i| \Leftrightarrow |-1| = |-i| \Leftrightarrow 1 = 1$ que é uma proposição verdadeira.

Interpretação: a imagem geométrica do complexo de $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ é equidistante das imagens geométricas dos complexos z_1 e z_2.

2.1 $A(x, 4, 0)$ pertence ao plano ACG, logo:

$x + 4 - 0 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, pelo que $A(2, 4, 0)$, c.q.v.

2.2 $\begin{cases} x - 1 = z \\ 1 - y = z \\ x + y - z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z + 1 \\ y = 1 - z \\ \cancel{z} + 1 + 1 \cancel{- z} - z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \\ z = -4 \end{cases}$, pelo que as coordenadas pedidas são $\boxed{(-3, 5, -4)}$.

2.3 Por hipótese, P pertence à reta que passa no centro do cubo (de aresta 2) e é paralela ao eixo Oz, logo $P(1, 5, z)$, $z > 2$.

Seja h a altura da pirâmide de vértice P. Então:

Volume da pirâmide $= 4 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \cancel{2^2} \times h = \cancel{4} \Leftrightarrow h = 3 \rightarrow P(1, 5, 2 + 3) \rightarrow P(1, 5, 5)$

$O\hat{G}P = \overrightarrow{GO} \,\hat{}\, \overrightarrow{GP}$

$G(2, 6, 2)$, logo $\overrightarrow{GO} = O - G = (-2, -6, -2)$ e $\overrightarrow{GP} = P - G = (-1, -1, 3)$.

$\therefore\ \overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{GP} = 2 + 6 - 6 = 2$, $\|\overrightarrow{GO}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{44}$ e $\|\overrightarrow{GP}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$

$\therefore\ \overrightarrow{GO} \,\hat{}\, \overrightarrow{GP} = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{GP}}{\|\overrightarrow{GO} \times \overrightarrow{GP}\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{44 \times 11}}\right) \approx 84{,}784° \approx \boxed{85°}$

3.1 $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}82 \Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) = 0{,}82 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 1 - 0{,}82 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}18^{(*)}$

$P(B \mid A) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{3} \underset{(*)}{\Leftrightarrow} \frac{0{,}18}{P(A)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3 \times 0{,}18 = P(A) \Leftrightarrow P(A) = \boxed{0{,}54}$

3.2 Número de casos possíveis: ${}^{30}C_4$

Dado que os cartões com os menores números são 7 e 22, falta apenas considerarmos outros dois, ambos com números superiores a 22, pelo que existem 30 – 22 = 8 cartões nessas condições. Assim, o número de casos favoráveis é ${}^{8}C_2$.

∴ A probabilidade pedida é:

$$P = \frac{{}^{8}C_2}{{}^{30}C_4} \approx 1{,}0217 \times 10^{-3} \approx \boxed{0{,}001}$$

4.1 <u>Assíntotas verticais</u> ($x = k$)

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{\ln 0^+}{0^+} = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$, logo, a reta de equação $\boxed{x = 0}$ é assíntota vertical ao gráfico de f (e é a única, pois f, sendo o quociente de duas funções contínuas, é contínua no seu domínio).

<u>Assíntotas horizontais</u> ($y = b$)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \underbrace{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}}_{\text{limite notável}} = 0$, logo, a reta de equação $\boxed{y = 0}$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$ (e é a única assíntota não vertical, pois o domínio de f é $\mathbb{R}^+$).

4.2 $f(x) > 2\ln x \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} - 2\ln x > 0 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x - 2x\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x(1 - 2x) > 0$

Como $1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ e $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$, vejamos a seguinte tabela de variação de sinal:

x	0	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$\ln x$	–	–	–	0	+
$1 - 2x$	+	0	–	–	–
$\ln x(1 - 2x)$	–	0	+	0	–

∴ C.S. = $\boxed{\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[}$

4.3 Como f e g são deriváveis nos seus domínios e g tem um extremo relativo para $x = 1$, vem que $g'(1) = 0$.

$$g'(x) = \left(\frac{k}{k}\right)' + \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2} + \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot x'}{x^2} = \frac{-k + 1 - \ln x}{x^2}$$

$$\therefore\ g'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{-k + 1 - \ln 1}{1^2} = 0 \Leftrightarrow -k + 1 - 0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{k = 1}$$

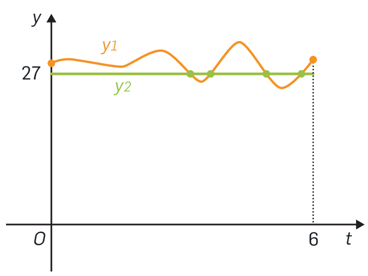
5. $\left(2x \operatorname{sen}\alpha + \dfrac{\cos\alpha}{x}\right)^2 = 4x^2 \operatorname{sen}^2\alpha + 4\cancel{x} \operatorname{sen}\alpha \dfrac{\cos\alpha}{\cancel{x}} + \dfrac{\cos^2\alpha}{x^2} = 4x^2 \operatorname{sen}^2\alpha + \overbrace{4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}^{\text{termo independente}} + \dfrac{\cos^2\alpha}{x^2}$

$\therefore\ 2 \times 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 1 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}(2\alpha) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2\alpha) = \dfrac{1}{2} \underset{\substack{\alpha \in]\pi,2\pi[\\ 2\alpha \in]2\pi,4\pi[}}{\Leftrightarrow} 2\alpha = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \vee\ 2\alpha = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2\pi$

$\Leftrightarrow 2\alpha = \dfrac{13\pi}{6} \vee 2\alpha = \dfrac{17\pi}{6} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \dfrac{13\pi}{12} \vee \alpha = \dfrac{17\pi}{12}}$

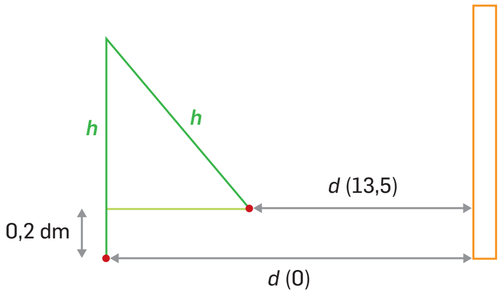
6.1 Na figura ao lado estão representadas graficamente, em $[0,6] \times [0,40]$, as curvas definidas por $y_1 = 30 + t\operatorname{sen}(\pi t)$ e $y_2 = 27$.

Observando esta figura, conclui-se que o número de soluções é $\boxed{4}$.



Interpretação: durante os primeiros seis segundos, a cadeira esteve por quatro vezes a uma distância de 27 dm do muro.

6.2 Seja h o comprimento da haste.



Atendendo à figura, e usando o teorema de Pitágoras, tem-se:

$h^2 = (h - 0{,}2)^2 + (d(0) - d(13{,}5))^2$

Ora, $d(0) = 30 + 0 \times \text{sen } 0 = 30$ e $d(13{,}5) = 30 + 12e^{-1{,}5}\, sen(13{,}5\pi) \approx 27{,}32$, pelo que $d(0) - d(13{,}5) \approx 2{,}68$

$\therefore \cancel{h^2} = \cancel{h^2} - 0{,}4h + 0{,}04 + 2{,}68^2 \Leftrightarrow 0{,}4h = 7{,}2224 \Leftrightarrow h = 18{,}056 \rightarrow h \approx \boxed{18}\,\text{dm}$

FIM