Exame Nacional de 2016

Prova Escrita de Matemática A
12.º Ano de Escolaridade
Prova 635/2.ª Fase/Versões 1 e 2

GRUPO I

Itens	Versão 1	Versão 2
1.	(A)	(B)
2.	(C)	(B)
3.	(B)	(A)
4.	(A)	(C)
5.	(D)	(C)
6.	(C)	(B)
7.	(C)	(D)
8.	(B)	(C)

Justificações:

1. $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = ?$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}6 \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0{,}6 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0{,}6 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}4$

$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 \Leftrightarrow 0{,}2 + 0{,}3 - P(A \cap B) = 0{,}4 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}1$

$\therefore P(A \mid B) = \dfrac{0{,}1}{0{,}3} = \dfrac{1}{3}$

2. A variável X, «números de lances livres em cinco que o Carlos encesta», é binomial $B\,(5;\,0,\,4)$, ou seja, a probabilidade de sucesso é 0,4 (logo, a probabilidade de insucesso é 0,6).
Assim, a probabilidade de o Carlos encestar exatamente quatro vezes é dada por:

$P(X = 4) = {}^5C_4 \times 0{,}4^4 \times 0{,}6^1 = 0{,}0768$

3. $\log_a(ab^3) = 5 \Leftrightarrow \log_a a + \log_a b^3 = 5 \Leftrightarrow 1 + 3\log_a b = 5 \Leftrightarrow \log_a b = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{4}{3}$

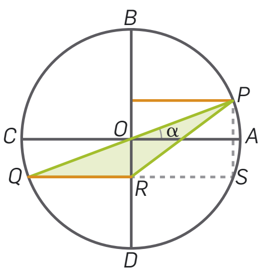
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_b a} = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \log_b a = \dfrac{3}{4}$

4. $\lim u_n = \lim \dfrac{n}{e^n} = 0^+$

$\therefore \lim f(u_n) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = \ln(0^+) = -\infty$

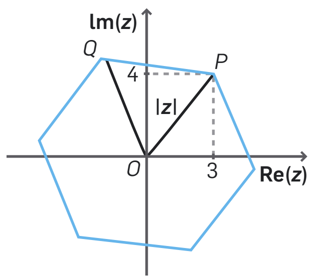
5. Atendendo à figura do lado, tem-se que a área do $\Delta[PQR]$ é:

$\dfrac{\overline{QR} \times \overline{PS}}{2} = \dfrac{\cos\alpha \times (\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\alpha)}{2} = \dfrac{2\operatorname{sen}\alpha\,\cos\alpha}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$



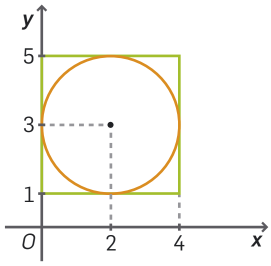
6. Como z é uma das raízes de índice 6 de um complexo w, então, as imagens dessas raízes são os vértices de um hexágono regular centrado na origem. Seja P a imagem geométrica de z e Q a imagem geométrica de uma outra raiz consecutiva. Então, o $\Delta[PQR]$ é equilátero, pelo que $|z| = \overline{QP}$

$\therefore \overline{QP} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, pelo que o perímetro do hexágono é $6 \times 5 = 30$.



7. A equação pedida é:

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$



8. Se (u_n) é uma progressão geométrica, então:

$u_8 = u_4 \times r^4 \Leftrightarrow 8192 = 32 \times r^4 \Leftrightarrow \pm\sqrt[4]{256} = r \Leftrightarrow r = \pm 4 \underbrace{\rightarrow}_{(u_n)\text{ é crescente}} r = 4$

$\therefore u_5 = u_4 \times r = 32 \times 4 = 128$

GRUPO II

1.

1.1. $P(B \mid A)$ é a probabilidade de o produto dos números das fichas retiradas ser ímpar, sabendo que a soma desses números é 10.
Casos possíveis (soma igual a 10): (1,9), (2,8), (3,7), (4,6).
Casos favoráveis (produto ímpar das fichas dos casos possíveis): (1,9), (3,7).

$\therefore P(B \mid A) = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$

1.2. As fichas com números pares só podem ficar nas filas A, B, C ou D, podendo permutá-las entre si (restando 12 casas para as 5 fichas com números ímpares, podendo também permutá-las entre si).

	1	2	3	4	
A					$\rightarrow 4! \times {}^{12}A_5$
B					$\rightarrow 4! \times {}^{12}A_5$
C					$\rightarrow 4! \times {}^{12}A_5$
D					$\rightarrow 4! \times {}^{12}A_5$

$\therefore$ o n.º pedido é $4 \times 4! \times {}^{12}A_5 = \boxed{9\,123\,840}$

2. $-1 + i = |-1 + i|\ cis(\alpha)$ sendo $|-1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e $tg\alpha = \frac{1}{-1} = -1 \rightarrow \alpha \underbrace{=}_{(-1,1) \in 2.^{\circ}Q} \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$$\therefore z = \frac{\sqrt{2}\,cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\rho^2 cis(2\theta)} = \frac{\sqrt{2}}{\rho^2}\ cis = \left(\frac{3\pi}{4} - 2\theta\right)$$

$$w = \sqrt{2}\,cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore z = w \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\rho^2}\ cis\left(-\frac{3\pi}{4} - 2\theta\right) = \sqrt{2}\ cis\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\rho^2} = \sqrt{2} \wedge \frac{3\pi}{4} - 2\theta = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 = 1 \wedge 2\theta = \frac{5\pi}{4} - 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\rho > 0} \rho = 1 \wedge \theta = \frac{5\pi}{8} - \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \underbrace{\Leftrightarrow}_{k=0} \boxed{\rho = 1 \wedge \theta = \frac{5\pi}{8}}$$

3.

3.1. Como α é perpendicular à reta, então, um seu vetor diretor é colinear ao vetor normal do plano, ou seja, um vetor diretor da reta pode ser (3, 2, 4). Como a reta passa em $C(2, 1, 4)$, uma sua equação vetorial é:

$\boxed{(x, y, z) = (2, 1, 4) + k(3, 2, 4),\ k \in \mathbb{R}}$

3.2. Um vetor diretor da reta OD pode ser $\overrightarrow{OD} = D - O = (4, 2, 2)$, logo, as suas equações cartesianas são (considerando o ponto 0):

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$$

Determinemos a interseção entre o plano α e a reta OD:

$$\begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{y}{2} \\ \frac{y}{2} = \frac{z}{2} \\ 3x + 2y + 4z - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = z \\ 3(2y) + 2y + 4y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = z \\ 12y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 1 = z \\ y = 1 \end{cases}$$

$\therefore$ as coordenadas pedidas são $\boxed{(2, 1, 1)}$.

3.3. Para que o ângulo $A\hat{P}B$ seja agudo, basta ter $\cos(A\hat{P}B) = \cos(\overrightarrow{PA} \hat{\ } \overrightarrow{PB}) > 0$, ou seja, basta que $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} > 0$ (pois $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} =$
$= \|\overrightarrow{PA}\| \times \|\overrightarrow{PB}\| \times \cos(\overrightarrow{PA} \hat{\ } \overrightarrow{PB})$)

Atendendo ao enunciado, $A(x, 0, 0)$ com $x > 0 \rightarrow 3x + 2 \times 0 + 4 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \rightarrow A(4, 0, 0)$

$B(0, y, 0)$ com $y > 0 \rightarrow 3 \times 0 + 2y + 4 \times 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow y = 6 \rightarrow B(0, 6, 0)$;

Dado $P(0, 0, z)$ com $z \neq 0$, tem-se:

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (0 - 4, 0 - 0, z - 0) \cdot (0 - 0, 0 - 6, z - 0) = z^2 > 0$, pois $z \neq 0$.

$\therefore$ o ângulo APB é agudo c.q.j.

4.

4.1. Como $D_f = \left]-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$, só poderá existir assíntota quando $x \rightarrow +\infty$. Seja $y = mx + b$ a sua equação.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1 - \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{lim. notável} = 0} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 1x) = \lim_{x \to +\infty} (\cancel{x} - \ln x - \cancel{x}) = -\ln(+\infty) = -\infty$$

$\therefore$ não existe assíntota oblíqua do gráfico de f.

4.2. $$f'(x) = \left(\frac{2 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(2 + \operatorname{sen} x)' \cos x - (2 + \operatorname{sen} x)(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (2 + \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1 + 2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \underbrace{x = -\frac{\pi}{6}}_{x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0
f'	$-$	0	$+$
f	↘	Mín.	↗

$\therefore$ conclui-se que:

- f é decrescente em $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right]$;
- f é crescente em $\left[-\frac{\pi}{6}, 0\right[$;
- f tem um mínimo relativo para $x = \boxed{-\frac{\pi}{6}}$.

4.3. Seja $y = mx + b$ a equação de r, sendo $m = f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

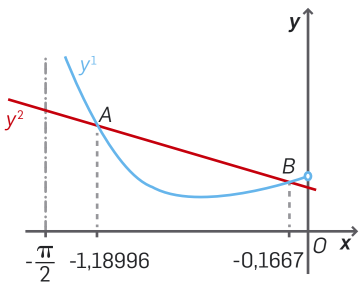
Em $]0, +\infty[$, $f'(x) = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x} \rightarrow m = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = -1 \rightarrow y = -x + b$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \ln 2^{-1} = \frac{1}{2} + \ln 2$$

$\therefore \frac{1}{2} + \ln 2 = -\frac{1}{2} + b \Leftrightarrow 1 + \ln 2 = b \rightarrow$ a equação de r é $y = -x + 1 + \ln 2$

Vejamos agora a interseção entre as curvas definidas por $y_1 = \frac{2 + \operatorname{sen} x}{\cos x}$ e $y_2 = -x + 1 + \ln 2$:

$\therefore$ as abcissas pedidas são $\boxed{-1{,}19 \text{ e } -0{,}17}$



5.

5.1. $24 = \dfrac{600 \times 0{,}003}{1 - e^{-0{,}003n}} \Leftrightarrow 1 - e^{-0{,}003n} = \dfrac{1{,}8}{24} \Leftrightarrow e^{-0{,}003n} = 0{,}925 \Leftrightarrow -0{,}003n = \ln(0{,}925)$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{\ln(0{,}925)}{-0{,}003} \Leftrightarrow n \approx 25{,}98718 \Leftrightarrow n \approx \boxed{26}$ meses.

5.2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{600x}{1 - e^{-nx}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{600x}{-(e^{-nx} - 1)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{600}{\dfrac{e^{-nx} - 1}{-nx}} = \dfrac{600}{\underbrace{\lim\limits_{-nx \to 0} \dfrac{e^{-nx} - 1}{-nx}}_{\text{lim. notável}} \times n} = \dfrac{600}{1 \times n} = \boxed{\dfrac{600}{n}}$

Interpretação: quando a taxa de juro tende para 0 , a prestação mensal aproxima-se do quociente entre o valor do empréstimo e o número de prestações mensais (ou seja, quando $x \to 0$, basta ao José dividir os 600 euros pelos n meses de duração do empréstimo).

6. $g(x) = x + 1 \Leftrightarrow \underbrace{g(x) - x - 1}_{h(x)} = 0$

h é uma função contínua em $[a, g(a)]$ (pois está definida pela soma de duas funções contínuas em IR , g e uma função afim).

$h(a) = g(a) - a - 1 \underbrace{>}_{g(a) > a + 1} a + 1 - a - 1 = 0$

$h[g(a)] = g[g(a)] - g(a) - 1 = a - g(a) - 1 \underbrace{<}_{-g(a) < -a - 1} a - a - 1 - 1 = -2 < 0$

$\therefore$ tem-se $h(a) > 0$ e $h[g(a)] < 0$, logo, pelo teorema de Bolzano, h tem pelo menos um zero em $]a, g(a)[$.

$\therefore$ a condição $g(x) = x + 1$ é possível em $]a, g(a)[$ c.q.m.

FIM