Exame Nacional de 2015 (1.ª fase)

Prova Escrita de Matemática A
12.º Ano de Escolaridade
Prova 635/Versões 1 e 2

GRUPO I

Itens	Versão 1	Versão 2
1.	(C)	(B)
2.	(C)	(B)
3.	(B)	(A)
4.	(A)	(D)
5.	(B)	(C)
6.	(C)	(B)
7.	(D)	(C)
8.	(B)	(C)

Justificações:

1. Há 2 candidatos para cada um dos extremos do banco e, nos 4 lugares do meio, há 4 candidatas para 4 lugares pelo que o n.º pedido é $\underline{2} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} \times \underline{1} = 48$

2. $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

Ora, $P(A \cup B) = 0{,}5 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}4 + \underbrace{0{,}3}_{1-0{,}7} - P(A \cap B) = 0{,}5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}2 \Rightarrow P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

3. $\log_3\left(\frac{3^k}{9}\right) = \log_3\left(\frac{3^k}{3^2}\right) = \log_3 3^{k-2} = (k-2) \times \underbrace{\log_3 3}_{1} = k - 2$

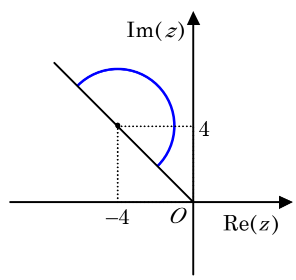
4. $\lim u_n = +\infty$

$\therefore \lim f(u_n) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x \to +\infty} \overset{\text{limite notável} = 0}{\frac{\ln x}{x}} = 0 + 0 = 0$

5. Área do trapézio $= \frac{\overline{CD} \times \overline{AB}}{2} \times \overline{BC} = \frac{(tg\,\alpha + sen\,\alpha)(1 - \cos\alpha)}{2} = \frac{tg\,\alpha - tg\,\alpha\cos\alpha + sen\,\alpha - sen\,\alpha\cos\alpha}{2} =$

$= \frac{tg\,\alpha - \frac{sen\,\alpha}{\cancel{\cos\alpha}} \times \cancel{\cos\alpha} + sen\,\alpha - \frac{2\,sen\,\alpha\cos\alpha}{2}}{2} = \frac{tg\,\alpha - \cancel{sen\,\alpha} + \cancel{sen\,\alpha} - \frac{sen\,(2\alpha)}{2}}{2} = \frac{tg\,\alpha}{2} - \frac{sen\,(2\alpha)}{4}$

6. A condição dada é a que está a azul na figura ao lado.
Assim, o comprimento pedido é o de uma semicircunferência de raio 3, ou seja: $\frac{2\pi \times 3}{2} = 3\pi$



7. A ordenada na origem da reta AB é negativa e, como $[AB]$ é um dos lados de um triângulo equilátero, o declive é $tg 60^\circ = \sqrt{3}$

8. A sucessão (u_n) está definida por recorrência.
$\therefore u_2 = -3u_1 + 2 = -3a + 2 \Rightarrow u_3 = -3u_2 + 2 = -3(-3a + 2) + 2 = 9a - 4$

GRUPO II

1. $i^{19} = \underbrace{i^{16}}_{1} \times i^3 = -i$

$$\therefore -2 + 2i^{19} = -2 - 2i = |-2 - 2i|cis\left(\underbrace{\pi + \frac{\pi}{4}}_{(-2,\,-2)\,\in\,3.^o\,Q}\right) = \sqrt{8}\,cis\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\,cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$\therefore z = \frac{-2 + 2i^{19}}{\sqrt{2}\,cis\,\theta} = \frac{2\cancel{\sqrt{2}}\,cis\,\frac{5\pi}{4}}{\cancel{\sqrt{2}}\,cis\,\theta} = 2cis\left(\frac{5\pi}{4} - \theta\right)$$

Para que z seja um imaginário puro, tem-se:

$$\frac{5\pi}{4} - \theta = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\theta = -\frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} - \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Dado que $\theta \in]0, 2\pi[$, obtém-se, para $k = 0$ e para $k = -1$, $\boxed{\frac{3\pi}{4} \text{ e } \frac{7\pi}{4}}$

2.1 Consideremos os acontecimentos:
C – «O funcionário reside em Coimbra»
M – «O funcionário é mulher»
Sabe-se que $P(\overline{C} \mid \overline{M}) = 0{,}3$ e pretende-se saber $P(M \mid C)$

1.º processo:

	C	$\overline{C}$	
M	0,05	0,6 – 0,15 = 0,45	0,5
$\overline{M}$		0,3 × 0,5 = 0,15	0,5
	0,4	0,6	

$$\therefore P(M \mid C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}05}{0{,}4} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

2.º processo:

$$P(M \mid C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{P(M \cap C)}{0{,}4} = ?$$

$$\text{Ora,} \begin{cases} P(C) = \underbrace{P(C \cap M) + P(C \cap \overline{M})}_{\text{Um residente em Coimbra é mulher ou homem}} \\ P(\overline{M}) = \underbrace{P(\overline{M} \cap C) + P(\overline{M} \cap \overline{C})}_{\text{Um homem reside em Coimbra ou fora de Coimbra}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}4 = P(C \cap M) + P(C \cap \overline{M}) \\ 0{,}5 = P(\overline{M} \cap C) + P(\overline{M}) \times P(\overline{C} \mid \overline{M}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}4 = P(C \cap M) + P(C \cap \overline{M}) \\ 0{,}5 = P(\overline{M} \cap C) + 0{,}5 \times 0{,}3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}4 = P(C \cap M) + 0{,}35 \\ 0{,}35 = P(\overline{M} \cap C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}05 = P(C \cap M) \\ 0{,}32 = P(\overline{M} \cap C) \end{cases}$$

$$\therefore P(M \mid C) = \frac{0{,}05}{0{,}4} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

2.2 O n.º de casos possíveis é ${}^{80}C_3$ pois é o n.º de maneiras de escolher 3 funcionários da empresa de entre 80.
40% de 80 é 32. Assim, haver, no máximo, dois funcionários a residir em Coimbra é o contrário de haver três funcionários a residir em Coimbra, logo o número de casos favoráveis é igual à diferença entre o n.º de maneiras de escolher 3 de entre os 80 funcionários da empresa e o n.º de maneiras de escolher 3 dos 32 desses funcionários, isto é, o n.º de casos favoráveis é dado por ${}^{80}C_3 - {}^{32}C_3$.

Pela Regra de Laplace (quociente entre o n.º de casos favoráveis e o n.º de casos possíveis quando há equiprobabilidade dos acontecimentos elementares), a probabilidade é igual a $\dfrac{{}^{80}C_3 - {}^{32}C_3}{{}^{80}C_3}$

3.1 O Volume da esfera $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$r = 16 - d(0) = 16 - (10 + 5) = 1$, logo o volume pedido é $\frac{4}{3}\pi \times 1^3 = 4{,}18879\ldots \approx \boxed{4{,}19}$ cm^3.

3.2 $d'(t) = 0 + (5 - t)'e^{-0{,}05t} + (5 - t)(e^{-0{,}05t})' = -e^{-0{,}05t} + (5 - t)(-0{,}05)e^{-0{,}05t} = (-1 - 0{,}25 + 0{,}05t)e^{-0{,}05t} = (0{,}05t - 1{,}25)e^{-0{,}05t}$

$d'(t) = 0 \Leftrightarrow 0{,}05t - 1{,}25 = 0 \vee \underbrace{e^{-0{,}05t} = 0}_{\text{impossível em } \mathbb{R}} \Leftrightarrow t = 25$

t	0	25	$+\infty$
$0{,}05t - 1{,}25$	$-$	0	$+$
$e^{-0{,}05t}$	$+$	$+$	$+$
d'	$-$	0	$+$
d	↘	Mín	↗

$\therefore$ a distância foi mínima no instante $t = 25$, ie, após $\boxed{\text{25 segundos}}$.

4.1 O domínio de f é $\mathbb{R}$ pelo que apenas $x = \frac{1}{2}$ pode ser a equação de uma assíntota vertical.

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2x - 1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{2}}\left(e^{x - \frac{1}{2}} - 1\right)}{2x - 1} = \lim_{x - \frac{1}{2} \to 0} \frac{e^{x - \frac{1}{2}} - 1}{x - \frac{1}{2}} \times \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} = 1 \times \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \neq \infty$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} [(x + 1)\ln x] = \frac{3}{2} \times \ln \frac{1}{2} \neq \infty$$

Limite notável:

$$\lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

$\therefore x = \frac{1}{2}$ não é a equação de uma assíntota vertical, ie, o gráfico de f não tem assíntotas verticais.

4.2 Em $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $f'(x) = (x + 1)'\ln x + (x + 1)(\ln x)' = \ln x + \frac{x + 1}{x} = \ln x + 1 + \frac{1}{x}$

$\therefore f''(x) = \frac{1}{x} + 0 + \frac{0 - 1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$x - 1$	$-$	0	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	P.I.	$\cup$

$\therefore$ o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[1, +\infty[$. Como $f(1) = 2\ln 1 = 0$, o gráfico de f tem um ponto de inflexão de coordenadas $\boxed{(1,0)}$.

4.3 f é contínua em $[1, e]$ pois está definida pelo produto de duas funções contínuas (uma polinomial e outra logarítmica).

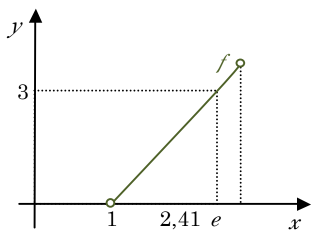
$f(1) = 0 < 3$ e $f(e) = (e + 1)\ln e = e + 1 > 3$

$\therefore$ 3 está entre $f(1)$ e $f(e)$

Pelo teorema de Bolzano, a condição $f(x) = 3$ tem pelo uma solução em $]1, e[$.

Atendendo ao gráfico ao lado, tem-se, em $]1, e[$:

$f(x) = 3 \Leftrightarrow x \approx \boxed{2{,}41}$



5.1 Se esse plano é paralelo a α, então o seu vetor normal é colinear ao de α pelo que uma sua equação é do tipo $x-2y+z+d=0$.
Como $A(0,0,2)$ pertence a esse novo plano, tem-se:

$0-2\times 0+2+d=0 \Leftrightarrow d=-2$.

$\therefore$ a equação pedida é $\boxed{x-2y+z-2=0}$.

5.2

1.º processo:

Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer da superfície esférica. Como $[AB]$ é o diâmetro dessa superfície, logo $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$, ie:

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0 \Leftrightarrow (x-0, y-0, z-2)\cdot(x-4, y-0, z-0)=0 \Leftrightarrow x(x-4)+y^2+(z-2)z=0 \Leftrightarrow x^2-4x+y^2+z^2-2z=0 \Leftrightarrow \boxed{x^2+y^2+z^2-4x-2z=0}$

2.º processo:

Sendo $[AB]$ o diâmetro, o centro da superfície esférica é o ponto médio M de $[AB]$ e o raio é metade do diâmetro.

Assim, $M\left(\dfrac{0+4}{2}, \dfrac{0+0}{2}, \dfrac{2+0}{2}\right)$, ie, $M(2,0,1)$

$$\text{Raio} = \overline{AB} = \frac{\sqrt{(0-4)^2+0^2+(2-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

$\therefore$ a equação pedida é $(x-2)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=(\sqrt{5})^2$ ou seja, $\boxed{(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=5}$

5.3 $P(4, y, 0)$, $y>0$.

$$\cos\frac{\pi}{3}=\cos(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{AP}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AP}\|}$$

$\overrightarrow{AB}=(4, 0, -2)$

$\overrightarrow{AP}=(4, y, -2)$

$$\therefore \frac{1}{2}=\frac{4\times 4+0+4}{\sqrt{4^2+0^2+2^2}\times\sqrt{4^2+y^2+2^2}} \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{20(20+y^2)}}_{>0}=\underbrace{40}_{>0} \Leftrightarrow 20(20+y^2)=40^2 \Leftrightarrow 20y^2=1200 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{60}$$

Como $y>0$, o valor pedido é $\sqrt{60}=\sqrt{2^2\times 15}=2\sqrt{15}$

6. $f'(x)=0-(-3sen(3x))=3sen(3x) \Rightarrow f'(a)=3sen(3a)=m_r$

$g'(x)=3\cos(3x) \Rightarrow g'\left(a+\dfrac{\pi}{6}\right)=3\cos\left(3a+\dfrac{3\pi}{6}\right)=3\cos\left(3a+\dfrac{\pi}{2}\right)=m_s$

Se r e s são perpendiculares, então $m_r=-\dfrac{1}{m_s}$

$$\therefore 3sen(3a)=-\frac{1}{3\cos\left(3a+\frac{\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow 3sen(3a)=-\frac{1}{3(-sen(3a))} \Leftrightarrow sen^2(3a)=\frac{1}{9} \Leftrightarrow sen(3a)=\pm\frac{1}{3}$$

Como $a\in\left]\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow 3a\in\left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[$ (3.º Q), logo $sen(3a)=\boxed{-\dfrac{1}{3}}$