Exame Nacional de 2014 (2.ª fase)

Prova Escrita de Matemática A
12.º Ano de Escolaridade
Prova 635/Versões 1 e 2

GRUPO I

Itens	Versão 1	Versão 2
1.	(C)	(B)
2.	(B)	(C)
3.	(B)	(C)
4.	(D)	(A)
5.	(C)	(B)
6.	(A)	(A)
7.	(B)	(D)
8.	(C)	(D)

Justificações:

1. $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}48 \;\Leftrightarrow\; P(\overline{A \cup B}) = 0{,}48 \;\Leftrightarrow\; 1 - P(A \cup B) = 0{,}48 \;\Leftrightarrow\; P(A \cup B) = 0{,}52$

$\Leftrightarrow\; 0{,}4 + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}52 \;\Leftrightarrow\; P(B) - P(A \cap B) = 0{,}12$

Como A e B são independentes, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ pelo que:

$P(B) - P(A) \times P(B) = 0{,}12 \;\Leftrightarrow\; P(B)\,(1 - 0{,}4) = 0{,}12 \;\Leftrightarrow\; P(B) = 0{,}2$

2. Como é para escolher 3 vértices ao acaso, o número de casos possíveis pode ser ${}^6C_3$; os únicos vértices do octaedro pertencentes a um plano paralelo ao plano de equação $z = 5$ são B, C, D e E , pelo que o número de casos favoráveis é ${}^4C_3 = 4$

$\therefore\; P = \dfrac{4}{{}^6C_3}$

3. Um termo qualquer de desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x} + x\right)^{10}$ é ${}^{10}C_p \times \left(\frac{2}{x}\right)^{10-p} \times x^p$. Assim, para que no termo «não exista» x, tem-se

$10 - p = p \;\Leftrightarrow\; p = 5.$

$\therefore$ o termo pedido é ${}^{10}C_5 \times \left(\frac{2}{x}\right)^{10-5} \times x^5 = 252 \times \dfrac{2^5}{\cancel{x^5}} \times \cancel{x^5} = 8064$

4. $\lim x_n = e^-$ $\left(\text{a sucessão de termo geral } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ aproxima-se de } e \text{ por valores inferiores a } e\right)$.

$\therefore\; \lim g(x_n) = \lim\limits_{x \to e^-} \ln(e - x) = \ln(0^+) = -\infty$

5. f é contínua em $x = \frac{\pi}{2}$ pelo que $\lim\limits_{x \to \frac{\pi^-}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Limite notável:

$$\lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = k - 3 \Leftrightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = k - 3 \Leftrightarrow \lim_{\frac{\pi}{2} - x \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\frac{\pi}{2} - x} \times (-1) = k - 3 \Leftrightarrow -1 = k - 3 \Leftrightarrow k = 2$$

6. Um dos zeros de g'' é 0 e o outro é um número positivo:

	$-\infty$	0			$+\infty$
g''	+	0	–	0	+
g	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

7. Um vetor normal a α é $\vec{u}(3, 2, 0)$, pelo que as alternativas (A) e (D) ficam descartadas (já que os vetores normais a esses planos são colineares a $\vec{u}$).

Um vetor perpendicular a $\vec{u}$ é $(2, -3, 0)$ (vetor normal aos planos de (B) e de (C) mas o ponto A pertence ao plano de (B) $(2 \times 1 - 0 - 3 + 1 = 0)$ e não pertence ao plano de (C) $(2 \times 1 - 0 + 3 = 5 \neq 0)$.

8. Como as coordenadas dos pontos A e B não são nem iguais nem simétricas, logo os argumentos dos complexos não podem ser nem $\frac{\pi}{4}$ nem $\frac{3\pi}{4}$, pelo que as opções (A) e (D) são rejeitadas.

Além disso, os pontos da região sombreada ficam fora do círculo, pelo que também a opçao (B) é rejeitada.

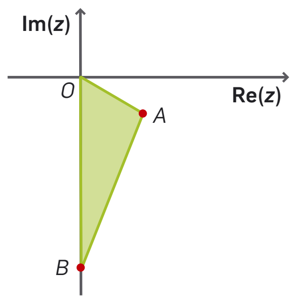
GRUPO II

1.1

$$z = 2\text{cis}\,\frac{\pi}{6} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i \Rightarrow \bar{z} = \sqrt{3} - i$$

$$\therefore\ w = \frac{(\sqrt{3} \cancel{+ i} \cancel{- i})^4}{1 + (\sqrt{3} + i)\,i} = \frac{9}{1 + \sqrt{3}\,i - 1} = \frac{9}{\sqrt{3}\,i} \times \frac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}\,i} = -3\sqrt{3}\,i$$

$$\therefore \text{ a área pedida é igual a } \frac{3\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{9}{2}}$$



1.2

$$z^2 - 2\cos\alpha z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{-4(1 - \cos^2\alpha)}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{-4\,\text{sen}^2\,\alpha}}{2}$$

pois sen$\alpha > 0$,
já que $\alpha \in \,]0, \pi[$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{-4} \times \text{sen}\,\alpha}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha \pm 2i \times \text{sen}\,\alpha}{2} \Leftrightarrow z = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha \vee z = \cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha$$

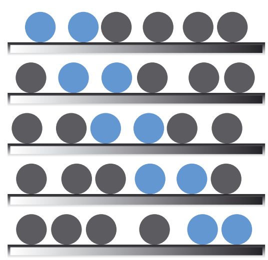
$$\Leftrightarrow z = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha \vee z = \cos(-\alpha) + i\,\text{sen}\,(-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z = cis\,\alpha \vee z = cis\,(-\alpha)}$$

2.1 1.º processo:

As 2 primeiras bolas são azuis e há 5 maneiras de elas ficarem juntas.

$$\therefore\ P = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times 5 = \boxed{\frac{1}{3}}$$



2.º processo:

As 6 bolas podem ser colocadas sem restrições, sendo que há 5 maneiras de as azuis ficarem juntas.

$$\therefore\ P = \frac{2! \times 4! \times 5}{6!} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

3.º processo:

2 das 6 bolas (as azuis) podem ser colocadas, sendo que há 5 maneiras de essas azuis ficarem juntas.

$$\therefore\ P = \frac{5}{{}^6C_2} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

2.2 De entre as 3 bolas que saem, pode haver 2 azuis ou 1 ou 0, pelo que os valores de X são 0, 1 e 2.

$$P(X=0)=\frac{{}^{4}C_3}{{}^{6}C_3}=\frac{1}{5}$$

Nenhuma das bolas é azul (isto é, são todas pretas)

$$P(X=1)=\frac{{}^{2}C_1\times{}^{4}C_2}{{}^{6}C_3}=\frac{3}{5}$$

Uma bola é azul e duas são pretas

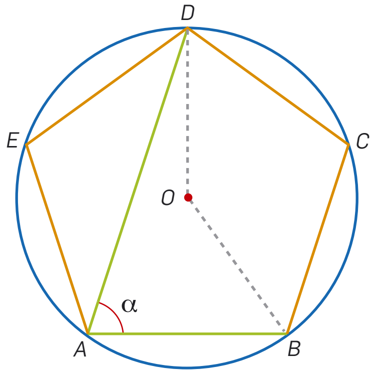
$$P(X=2)=\frac{{}^{2}C_2\times{}^{4}C_1}{{}^{6}C_3}=\frac{1}{5}$$

Duas bolas são azuis e uma é preta

$\therefore$ a tabela de distribuição pedida é:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

3. $\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|}=\dfrac{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AD}\|\times\cos\alpha}{\|\overrightarrow{AD}\|}=1\times\cos\alpha$ em que $\alpha=D\hat{A}B$.



Sendo O o centro da circunferência (circunscrita ao pentágono regular), sabe-se que a amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do seu arco correspondente.

$$\therefore\ D\hat{O}C=\frac{2\pi}{5}\Rightarrow D\hat{O}B=2\times\frac{2\pi}{5}=\frac{4\pi}{5}$$

Ora, qualquer ângulo inscrito numa circunferência tem metade da amplitude de um ângulo ao centro com o mesmo arco.

$$\therefore\ D\hat{A}B=\frac{\frac{4\pi}{5}}{2}=\frac{2\pi}{5}=\alpha$$

$$\therefore\ \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|}=\cos\frac{2\pi}{5}=\cos\left(2\times\frac{\pi}{5}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\text{ c.q.d.}$$

4.

4.1 <u>Assíntotas verticais</u> ($x=k$):

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=0-1+\frac{\ln 0^+}{0^-}=-1+\frac{-\infty}{0^-}=+\infty$$

$\therefore x=0$ é a equação de uma assíntota vertical do gráfico de f (e é a única, pois f é contínua no seu domínio).

<u>Assíntotas não verticais</u> ($y=mx+b$):

Limite notável: $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\ln y}{y}=0$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{\ln(-x)}{x^2}\right)=1-\frac{1}{-\infty}+\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x^2}=1-0+\lim_{-x\to+\infty}\frac{\ln(-x)}{(-x)}\times\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x}=1+0\times 0=1$$

$$\therefore\ b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{\ln(-x)}{x}\right)=-1+\lim_{-x\to+\infty}\frac{\ln(-x)}{(-x)}=-1+0=-1$$

$\therefore$ $y=x-1$ é a equação de uma assíntota não vertical do gráfico de f.

$\therefore$ as equações pedidas são $\boxed{x=0}$ e $\boxed{y=x-1}$.

4.2 f é contínua em $[-e,-1]$ pois está definida pela soma de duas funções contínuas (uma polinomial e outra que é o quociente entre uma função logarítmica e outra polinomial);

$$f(-e)=-e-1+\frac{\ln e}{-e}=-e-1-\frac{1}{e}<-e$$

$$f(-1)=-1-1+\frac{\ln 1}{-1}=-2>-e$$

$\therefore -e$ está entre $f(-e)$ e $f(-1)$

Pelo teorema de Bolzano, a condição $f(x)=-e$ tem pelo uma solução em $]-e,-1[$ c.q.d.

4.3 $g(x) = \cancel{-x}\cancel{+x} - 1 + \dfrac{\ln(-x)}{x} \Rightarrow g'(x) = 0 + \dfrac{\dfrac{-1}{-x} \times x - \ln(-x) \times 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln(-x)}{x^2}$

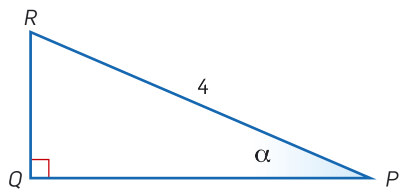
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(-x) = 0 \Leftrightarrow \ln(-x) = 1 \Leftrightarrow -x = e \Leftrightarrow x = -e$

$\boxed{x < 0 \text{ logo } x^2 \neq 0}$

	$-\infty$	$-e$	0
g'	$-$	0	$+$
g	↘	Mín	↗

$\therefore$ g é decrescente em $]-\infty, -e]$ e crescente em $[-e, 0[$ e tem um mínimo relativo de abcissa $\boxed{-e}$.

5. Área do quadrilátero $[PQRS] = 2 \times$ Área do $\Delta[PQR] = 2 \times \dfrac{\overline{PQ} \times \overline{RQ}}{2} = \overline{PQ} \times \overline{RQ} = ?$



Ora, $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{\overline{RQ}}{PR} \Leftrightarrow \overline{RQ} = 4\ \text{sen}\ \alpha$ e $\cos \alpha = \dfrac{\overline{PQ}}{PR} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 4 \cos \alpha$

$\therefore$ área do quadrilátero $[PQRS] = 4\ \text{sen}\ \alpha \times 4 \cos \alpha = 16\ \text{sen}\ \alpha \cos \alpha = A(\alpha)$

$tg(\theta) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (2\sqrt{2})^2 + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 9 = \dfrac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow \cos \theta = \pm \dfrac{1}{3}$

Como $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos \theta = \dfrac{1}{3}$ pelo que $\text{sen}^2\ \theta = 1 - \cos^2 \theta = \dfrac{8}{9}$, logo $\text{sen}\ \theta = \dfrac{\sqrt{8}}{3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore A(\theta) = 16 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \boxed{\dfrac{32\sqrt{2}}{9}}$

<u>Outro processo</u> (para calcular $A(\theta)$)

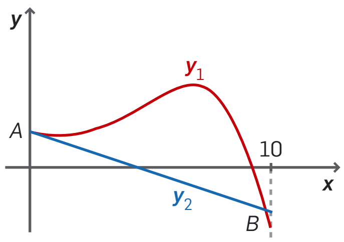
$A(\alpha) = 16\ sen\ \alpha \cos \alpha = 16\ tg\ \alpha \cos^2 \alpha \Rightarrow A(\theta) = 16 \times 2\sqrt{2} \times \dfrac{1}{9} = \boxed{\dfrac{32\sqrt{2}}{9}}$

6. $f(0) = 7$ pelo que se tem $A(0, 7)$; se a reta AB tem declive -2 e a ordenada na origem é 7, então a equação reduzida dessa reta é $y = -2x + 7$.

Seja x a abcissa positiva de B. Como B pertence à reta AB e ao gráfico de f, a equação a resolver é

$f(x) = -2x + 7 \Leftrightarrow -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 = -2x + 7$

Sendo $y_1 = -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8$ e $y_2 = -2x + 7$, vejamos a interseção entre y_1 e y_2 em $[0, 10] \times [-20, 30]$:



Na interseção, obtém-se o valor 9,34665 pelo que o valor pedido é $\boxed{9{,}35}$

<u>Observação:</u> outra maneira de determinar a abcissa de B seria:

Sejam (x, y) as coordenadas de B; como o declive da reta AB é -2, logo $\dfrac{y-7}{x-0} = -2 \Leftrightarrow y = -2x + 7$, pelo que a equação a resolver é

$f(x) = -2x + 7 \Leftrightarrow -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 = -2x + 7$

7. $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \wedge \overbrace{e^{2x} \neq 0}^{\text{condição universal}} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$ mas não há mudança de sinal de f para $x = -2$, pelo que h' não tem um extremo em $x = -2$ (isto é, tem apenas um extremo); assim, conclui-se que a afirmação I é falsa.

pois –2 é um zero

$$h''(x) = \frac{f'(x) \times e^{2x} - f(x) \times 2e^{2x}}{e^{4x}} \Rightarrow h''(-2) = \frac{f'(-2) \times e^{-4} - f(-2) \times 2e^{-4}}{e^{-8}} = \frac{0 \times e^{-4} - 0 \times 2e^{-4}}{e^{-8}} = 0$$ pelo que a afirmação II é verdadeira.

pois –2 é um minimizante

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 3$, pelo que o gráfico de h tem uma assíntota de equação $y = 3$ (ou $y - 3 = 0$) e não $y + 3 = 0$, ou seja, a afirmação III é falsa.

Fim