

Prova Escrita de MATEMÁTICA A - 12º Ano
2013 - Época especial

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Temos que A e B são acontecimentos incompatíveis, logo $P(A \cap B) = 0$

Como $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$, e $P(A \cap B) = 0$, vem que:
 $P(\overline{A} \cap B) = P(B)$, pelo que $P(B) = 0,55$

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, $P(A \cap B) = 0$ e $P(A) = 0,3$, temos que:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,55 = 0,85$

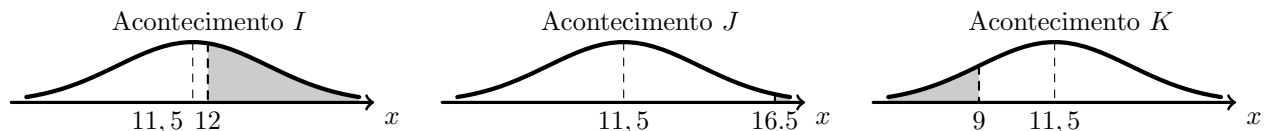
Assim, pelo teorema do acontecimento contrário, $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,85 = 0,15$

Finalmente, pelas leis de De Morgan, temos que:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 0,15$$

Resposta: **Opção C**

2. Esboçando a representação da representação geométrica das probabilidades dos três acontecimentos, vem:



Assim podemos afirmar que o acontecimento I é o mais provável e o acontecimento J , o menos provável, pelo que:

$$P(J) < P(K) < P(I)$$

Resposta: **Opção A**



3. Para que a comissão seja mista, deve ter pelo menos um rapaz, e como deve ter mais raparigas que rapazes, então o número de comissões diferentes que se podem formar pode ser calculado como a **soma** de comissões diferentes relativas a composições de dois tipos:

- 3 raparigas e 2 rapazes

Como a ordem não é relevante podemos escolher 3 raparigas do conjunto das 15, de ${}^{15}C_3$ formas diferentes e podemos escolher os 2 rapazes de 7C_2 formas diferentes, logo existem ${}^{15}C_3 \times {}^7C_2$ comissões deste tipo

- 4 raparigas e 1 rapaz

As comissões deste tipo são ${}^{15}C_4 \times 7$ que correspondem a escolher 4 das 15 raparigas e 1 dos 7 rapazes, sem considerar a ordem relevante.

Assim, o número de comissões diferentes que se podem formar, de acordo com as condições impostas, é:

$${}^{15}C_3 \times {}^7C_2 + {}^{15}C_4 \times 7$$

Resposta: **Opção B**



4. Determinando a expressão da segunda derivada vem:

$$f''(x) = (f'(x))' = ((4+x)^2)' = (4^2 + 2 \times 4x + x^2)' = (16)' + (8x)' + (x^2)' = 0 + 8 + 2x = 2x + 8$$

Calculando o zero da segunda derivada temos:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow 2x = -8 \Leftrightarrow x = -4$$

Estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
g''		-	+
g			Pt. I. 

Logo, podemos concluir que gráfico da função f tem um ponto de inflexão de coordenadas $(-4, f(-4))$

Resposta: **Opção D**

A afirmação da opção (A) é falsa porque existem objetos cuja imagem pela segunda derivada é negativa ($x \in]-\infty, -4[$).

A afirmação da opção (B) é falsa, porque apesar da primeira derivada ter um zero ($x = -4$), este não está associado a uma mudança de sinal.

A afirmação da opção (C) é falsa porque o gráfico de f tem um ponto de inflexão.

5. Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2x] = 2$, temos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-2x)] = 2$, o que significa que a reta de equação $y = -2x + 2$ é assíntota do gráfico de f , quando $x \rightarrow -\infty$

O único gráfico que admite a reta $y = -2x + 2$ como assíntota é o da opção (A).

Resposta: **Opção A**

6. Simplificando a condição $\ln(e^{-x} - a) \leq 0$, como a função logarítmica tem imagens não positivas para $x \in]0, 1[$, temos:

$$\begin{aligned} \ln(e^{-x} - a) \leq 0 &\Leftrightarrow 0 < e^{-x} - a \leq 1 \Leftrightarrow e^{-x} - a > 0 \wedge e^{-x} - a \leq 1 \Leftrightarrow e^{-x} > a \wedge e^{-x} \leq 1 + a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -x > \ln(a) \wedge -x \leq \ln(1 + a) \Leftrightarrow x < -\ln(a) \wedge x \geq -\ln(1 + a) \end{aligned}$$

Assim, $S = [-\ln(1 + a), -\ln(a)[$

Resposta: **Opção B**



7. Escrevendo $(1 + i)$ na f.t. temos $(1 + i) = \rho \operatorname{cis} \theta$, onde:

- $\rho = |(1 + i)| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{1} = 1$; como $\operatorname{sen} \theta > 0$ e $\operatorname{cos} \theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{4}$

Logo $(1 + i) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$

Pela fórmula de Moivre para a potência temos que:

Como $w = (1 + i)^{2013} = \left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right)^{2013} = \sqrt{2}^{2013} \operatorname{cis} \left(2013 \times \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}^{2013} \operatorname{cis} \frac{2013\pi}{4}$

Assim:

$$\operatorname{arg}(w) = \frac{2013\pi}{4} = \frac{(4 \times 503 + 1)\pi}{4} = \frac{4 \times 503\pi + \pi}{4} = \frac{4 \times 503\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 503\pi + \frac{\pi}{4}$$

Descontando as voltas completas temos $\operatorname{arg}(w) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Ou seja, a representação geométrica de w é um ponto do 3º quadrante que pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, pelo que $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$

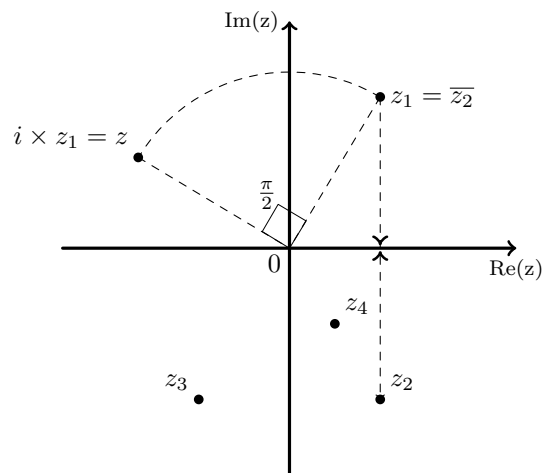
Resposta: **Opção D**

8. As operações "multiplicar por i " e "transformar no conjugado" correspondem geometricamente a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos" e "encontrar o ponto simétrico relativamente ao eixo real", respetivamente.

Assim, se considerarmos as operações inversas, pela ordem inversa, a partir da imagem geométrica de z , (como indicado na figura), obtemos como resposta a imagem geométrica de z_2 .

Ou, dizendo de outra forma, se $w = z_2$, temos que $\bar{w} = \bar{z_2} = z_1$ e $i \times \bar{w} = i \times z_1 = z$, pelo que $w = z_2$.

Resposta: **Opção C**



GRUPO II

1.

1.1. Como $\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ vem que:

$$1 + 2i \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{6} \right) = 1 + 2i \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2} \right) = 1 - \sqrt{3}i + i^2 = 1 - \sqrt{3}i - 1 = -\sqrt{3}i = \sqrt{3} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{2} \right)$$

Escrevendo $1 + \sqrt{3}i$ na f.t. temos $1 + \sqrt{3}i = \rho \operatorname{cis} \theta$, onde:

- $\rho = |1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$; como $\operatorname{sen} \theta > 0$ e $\operatorname{cos} \theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{3}$

Assim $1 + \sqrt{3}i = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned} \text{Logo } z_1 &= \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + 2i \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{6} \right)} = \frac{2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}}{\sqrt{3} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{2} \right)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Se } z = \operatorname{cis} \theta, \text{ então } \frac{z}{z_1} = \frac{\operatorname{cis} \theta}{\frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \operatorname{cis} \left(\theta - \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{\operatorname{cis} \theta}{\frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \operatorname{cis} \left(\theta - \frac{5\pi}{6} \right)$$

E como $\frac{z}{z_1}$ é número real negativo, então $\arg \left(\frac{z}{z_1} \right) = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, logo temos que:

$$\theta - \frac{5\pi}{6} = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \pi + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{6\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

Como $\theta \in [0, 2\pi[$, então $k = 0$ e $\theta = \frac{11\pi}{6}$

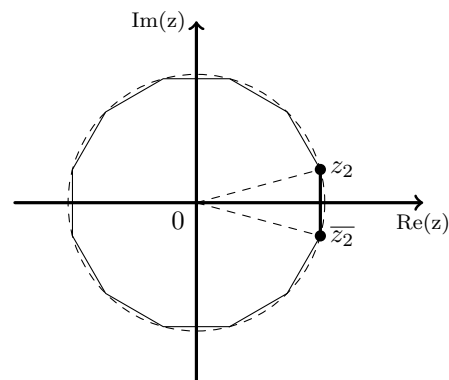
1.2. Sabemos que $|\overline{z_2}| = |z_2|$ e que $\arg(\overline{z_2}) = -\arg(z_2)$, logo $\overline{z_2} = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{12} \right)$

Assim, temos que o polígono regular pode ser decomposto em n triângulos isósceles, congruentes com o triângulo OAA' , em que o ponto A é a imagem geométrica de z_2 e A' é a imagem geométrica de $\overline{z_2}$. Como a amplitude do ângulo AOA' é $2 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$, sabemos

$$\text{que } \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{2\pi \times 6}{\pi} = n \Leftrightarrow 12 = n$$

Assim temos que z_2 (e também $\overline{z_2}$) são raízes de índice 12 de w , ou seja $w = (z_2)^{12}$, logo usando a fórmula de Moivre e escrevendo o resultado da potência na f.a., temos:

$$w = (z_2)^{12} = \left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{12} \right) \right)^{12} = (\sqrt{2})^{12} \operatorname{cis} \left(12 \times \frac{\pi}{12} \right) = 64 \operatorname{cis} \pi = -64$$



2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma lâmpada produzida nessa empresa, e os acontecimentos:

F : «A lâmpada escolhida é fluorescente»

T : «A lâmpada escolhida tem a forma tubular»

Temos que $P(F) = 0,55$, $P(T|F) = 0,5$ e $P(\bar{T}|\bar{F}) = 0,9$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(\bar{F}) = 1 - P(F) = 1 - 0,55 = 0,45$
- $P(T \cap F) = P(F) \times P(T|F) = 0,55 \times 0,5 = 0,275$
- $P(\bar{T} \cap F) = P(F) - P(T \cap F) = 0,55 - 0,275 = 0,275$
- $P(\bar{T} \cap \bar{F}) = P(\bar{F}) \times P(\bar{T}|\bar{F}) = 0,45 \times 0,9 = 0,405$
- $P(\bar{T}) = P(\bar{T} \cap \bar{F}) + P(\bar{T} \cap F) = 0,405 + 0,275 = 0,68$
- $P(T) = 1 - P(\bar{T}) = 1 - 0,68 = 0,32$

	F	\bar{F}	
T	0,275		0,32
\bar{T}	0,275	0,405	0,68
	0,55	0,45	1

Assim, calculando a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, uma lâmpada produzida nessa empresa, ela ser fluorescente, sabendo que tem a forma tubular, e escrevendo o resultado com arredondamento às centésimas, temos

$$P(F|T) = \frac{P(F \cap T)}{P(T)} = \frac{0,275}{0,32} \approx 0,86$$

3.

3.1.

3.2. Existem 12 bolas numeradas de 1 a 12 e só duas delas têm um número múltiplo de 5 (a bola com o número 5 e a bola com o número 10).

Assim, ao retirarmos 3 bolas, podemos ter 0 bolas numeradas com múltiplos de 5, apenas 1 bola numerada com um número múltiplo de 5 ou 2 bolas numeradas com números múltiplos de 5.

Assim, calculando as respetivas probabilidades temos:

- $P(X = 0) = \frac{{}^2C_0 \times {}^{10}C_3}{{}^{12}C_3} = \frac{1 \times 120}{220} = \frac{120}{220} = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$
- $P(X = 1) = \frac{{}^2C_1 \times {}^{10}C_2}{{}^{12}C_3} = \frac{2 \times 45}{220} = \frac{90}{220} = \frac{9}{22}$
- $P(X = 2) = \frac{{}^2C_2 \times {}^{10}C_1}{{}^{12}C_3} = \frac{1 \times 10}{220} = \frac{1}{22}$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{22}$



3.3. Como as sucessivas extrações das bolas são feitas repondo a bola extraída anteriormente, cada repetição da experiência é feita de forma independente das restantes.

Definindo o acontecimento «registar número múltiplo de 3» como sucesso, este acontecimento tem probabilidade não nula em cada repetição da experiência e como as repetições são independentes, a probabilidade é constante em cada uma delas.

Assim, para a aplicação do modelo binomial ($P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k}$), como o João fará extrações sucessivas até ter registado 8 elementos, temos que a experiência será repetida 8 vezes ($n = 8$).

Como definimos o acontecimento «registar número múltiplo de 3» como sucesso, temos que a probabilidade é $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ (das 12 bolas, 4 são múltiplos de 3: $M_3 = \{3, 6, 9, 12\}$).

Logo a probabilidade do insucesso é $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Como se pretende calcular a probabilidade de que nas 8 experiências, sejam registados exatamente 5 vezes números múltiplos de 3, temos que $k = 5$.

Assim, temos que:

$$P(X = 5) = {}^8 C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^{8-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times {}^8 C_5$$

4. Como o declive da reta tangente ao gráfico da função, em cada ponto, é dado pela função derivada, vamos determinar a expressão analítica da função derivada:

$$f'(x) = (\ln x + \cos x - 1)' = (\ln x)' + (\cos x)' - (1)' = \frac{1}{x} + (-\operatorname{sen} x) - 0 = \frac{1}{x} - \operatorname{sen} x$$

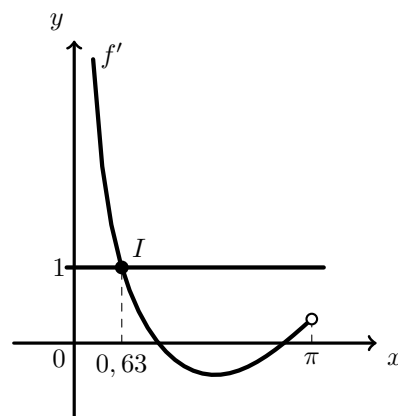
Como o declive de uma reta é dado pela tangente da sua inclinação, temos que: $m = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$

Logo a abcissa do ponto A é a solução da equação

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \operatorname{sen} x = 1$$

Assim, visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função f' e a reta $y = 1$, numa janela coerente com o domínio da função f ($0 < x < \pi$), (reproduzido na figura ao lado) e determinando a interseção das duas, obtemos os valores aproximados (às centésimas) das coordenadas do ponto: $I(0,63; 1,00)$.

Ou seja o valor aproximado às centésimas da abcissa do ponto A , é 0,63



5.

5.1. Sabemos que $f(0) = \ln k$

Calculando $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x}{1 - e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \times 3x}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{3}{2} \times \frac{2x}{e^{2x} - 1} \right) = \\ &= -\frac{3}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{e^{2x} - 1} = -\frac{3}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{e^{2x} - 1}{2x}} = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x}} =\end{aligned}$$

(se $y = 2x$, como $x \rightarrow 0^-$ então $y \rightarrow 0^-$)

$$= -\frac{3}{2} \times \frac{1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{1} = -\frac{3}{2}$$

Assim, para que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$, temos que:

$$-\frac{3}{2} = \ln k \Leftrightarrow k = e^{-\frac{3}{2}}$$



5.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2} - \ln \left(\frac{6x}{x+1} \right) \right)' &= \left(\frac{x}{2} \right)' - \left(\ln \left(\frac{6x}{x+1} \right) \right)' = \frac{1}{2} \times (x)' - \frac{\left(\frac{6x}{x+1} \right)'}{\frac{6x}{x+1}} = \\ &= \frac{1}{2} \times 1 - \frac{\frac{(6x)'(x+1) - (6x)(x+1)'}{(x+1)^2}}{\frac{6x}{x+1}} = \frac{1}{2} - \frac{6(x+1) - (6x)(1+0)}{(x+1)^2 \frac{6x}{x+1}} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{6(x+1) - 6x}{6x(x+1)} = \frac{1}{2} - \frac{6x+6-6x}{6x(x+1)} = \frac{1}{2} - \frac{6}{6x(x+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x(x+1)} \end{aligned}$$

Determinando os zeros da derivada em $]0, +\infty[$, vem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{1}{x(x+1)} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{x(x+1)} \underset{x(x+1) \neq 0}{\Leftrightarrow} x(x+1) = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2 \end{aligned}$$

Como $-2 \notin]0, +\infty[$, 1 é o único zero da derivada em $]0, +\infty[$

Estudando, neste intervalo, a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		1	$+\infty$
f'		-	0	+
f		\searrow	min	\nearrow

Assim, podemos concluir $f(1)$ é um extremo relativo da função f em $]0, +\infty[$.

Calculando $f(1)$ temos:

$$f(1) = \frac{1}{2} - \ln \left(\frac{6(1)}{1+1} \right) = \frac{1}{2} - \ln \left(\frac{6}{2} \right) = \frac{1}{2} - \ln 3 = \ln \left(e^{\frac{1}{2}} \right) - \ln 3 = \ln(\sqrt{e}) - \ln 3 = \ln \left(\frac{\sqrt{e}}{3} \right)$$

6. Como $y = 2x - 1$ é assíntota do gráfico de g , e o domínio da função g é \mathbb{R}^+ , temos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$

Como o domínio da função h é \mathbb{R}^+ , vamos calcular o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - [g(x)]^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{[g(x)]^2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[g(x)]^2}{x^2} = \\ &= \frac{1}{+\infty} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{g(x)}{x} \right)^2 \right] = 0 - \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \right)^2 = -2^2 = -4 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -4$, o gráfico de h tem uma assíntota horizontal.

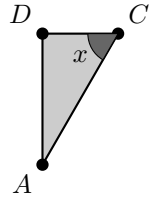


7.

7.1. Vamos considerar \overline{DA} a medida da altura do triângulo e \overline{EC} a medida da base. Sabemos que $\overline{CA} = 1$, porque é a medida do raio da circunferência.

Como $[CA]$ é a hipotenusa do triângulo e $[DA]$ o cateto oposto ao ângulo x , usando o seno do ângulo temos que:

$$\sin x = \frac{\overline{DA}}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\overline{DA}}{1} \Leftrightarrow \overline{DA} = \sin x$$



Por outro lado, como $[DC]$ é o cateto adjacente, usando a definição de cosseno, temos:

$$\cos x = \frac{\overline{DC}}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{DC}}{1} \Leftrightarrow \overline{DC} = \cos x$$

Como $\overline{ED} = 6$ temos que:

$$\overline{EC} = \overline{ED} + \overline{DC} \Leftrightarrow \overline{EC} = 6 + \cos x$$

Logo, calculando a área do triângulo, obtemos:

$$A_{[AEC]} = \frac{\overline{EC} \times \overline{DA}}{2} = \frac{(6 + \cos x)(\sin x)}{2} = \frac{6 \sin x + \sin x \cos x}{2} = 3 \sin x + \frac{\sin x \cos x}{2}$$

Como $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, podemos escrever:

$$A_{[AEC]} = 3 \sin x + \frac{\sin x \cos x}{2} = 3 \sin x + \frac{2 \sin x \cos x}{4} = 3 \sin x + \frac{\sin(2x)}{4} = 3 \sin x + \frac{1}{4} \sin(2x)$$

7.2. Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em \mathbb{R} , é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Como $1,72 < 2 < 2,37$, ou seja, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) < 2 < f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$ tal que $f(c) = 2$, ou seja, que a equação $f(x) = 2$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$.

C.A.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = \\ &= 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \\ &\approx 1,72 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \\ &\approx 2,37 \end{aligned}$$

