12MatA_1_prop_2012-2013

Grupo I

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Versão 1	**B**	**D**	**C**	**A**	**D**	**B**	**C**	**A**
Versão 2	**C**	**A**	**B**	**D**	**D**	**C**	**B**	**B**

Grupo II

1. $z_1 = \sqrt{2} + cis\,\frac{3\pi}{4} \quad e \quad z_2 = 1 + i$

1.1.

$$w = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{2} + 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\,sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)}{1+i}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{2} + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^4 = \left(\frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^4 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^4 = \left(cis\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right)^4 = \left(cis\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^4 = cis\,\pi = -1$$

1.2. $z_3 = cis\,\alpha, \quad \alpha \in \left]-2\pi, \pi\right[$

$z_3 + \overline{z_2} = cis\,\alpha + 1 - i = \cos\alpha + i\,sen\alpha + 1 - i = 1 + \cos\alpha + i\,(sen\alpha - 1)$ como $\left(z_3 + \overline{z_2}\right) \in IR$

vem que $sen\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow sen\alpha = sen\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$

$\therefore \alpha \in \left]-2\pi, -\pi\right[\quad para \quad k = -1 \Rightarrow \alpha = -\frac{3\pi}{2}$

2. P: " bola preta"

I: " bola ser ímpar"

$P(P) = \frac{2}{5} \Rightarrow P(\overline{P}) = \frac{3}{5}$

$P(\overline{I} \mid P) = 20\%$

$P(I \mid \overline{P}) = 40\% \Rightarrow P(\overline{I} \mid \overline{P}) = 100\% - 40\% = 60\%$

2.1.

$$P(P\mid \bar I)=\frac{P\left(P\cap \bar I\right)}{P\left(\bar I\right)}=\frac{P\left(P\cap \bar I\right)}{P\left(P\cap \bar I\right)+P\left(\bar P\cap \bar I\right)}=\frac{P(P)\times P\left(\bar I\mid P\right)}{P(P)\times P\left(\bar I\mid P\right)+P\left(\bar P\right)\times P\left(\bar I\mid \bar P\right)}$$

$$=\frac{\frac{2}{5}\times 0{,}2}{\frac{2}{5}\times 0{,}2+\frac{3}{5}\times 0{,}6}=\frac{2}{11}$$

2.2.

Das n bolas que a caixa contém $\frac{2}{5}n$ são pretas e $\frac{3}{5}n$ são brancas.

$$P\left(\text{"}ambas\ serem\ brancas\text{"}\right)=\frac{\frac{3}{5}n\left(\frac{3}{5}n-1\right)}{n(n-1)}=\frac{\frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}n-1\right)}{n-1}$$

$$\therefore \frac{\frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}n-1\right)}{n-1}=\frac{7}{20}\Leftrightarrow \frac{3}{5}n-1=\frac{7}{12}(n-1)\Leftrightarrow n=25$$

3.

$$P(B)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow P\left(\bar B\right)=\frac{3}{4}$$

$$P\left(\bar A\cup \bar B\right)=\frac{15}{16}\Leftrightarrow P\left(\overline{A\cap B}\right)=\frac{15}{16}\Leftrightarrow 1-P(A\cap B)=\frac{15}{16}\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{16}$$

$$P\left(A\mid \bar B\right)=\frac{7}{12}\Leftrightarrow \frac{P\left(A\cap \bar B\right)}{P\left(\bar B\right)}=\frac{7}{12}\Leftrightarrow P\left(A\cap \bar B\right)=\frac{7}{16}$$

$$\therefore P(A)=P(A\cap B)+P\left(A\cap \bar B\right)\Leftrightarrow P(A)=\frac{1}{16}+\frac{7}{16}\Leftrightarrow P(A)=\frac{1}{2}$$

4.

4.1.

Assíntotas Verticais :

Se $x<0$: *f é o quociente de funções contínuas* logo é uma função contínua em IR^-.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{e^{4x}-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^x-1}{x}\times\frac{x}{e^{4x}-1}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{4}\lim_{x\to 0^-}\frac{4x}{e^{4x}-1}=$$

$$=1\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{\lim\limits_{4x\to 0^-}\frac{e^{4x}-1}{4x}}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{4}\in IR$$

Logo o gráfico não tem A.V. quando $x\to 0^-$.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\ln(x)\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$$. Fazendo $y=\frac{1}{x}$ temos que:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to +\infty}\frac{\ln\frac{1}{y}}{y} = -\lim_{y\to +\infty}\left(\frac{\ln y}{y}\right) = 0$$

Logo o gráfico não tem A.V. quando $x\to 0^+$.

Se $x>0$: *f é o produto de funções contínuas* logo é contínua em IR^+.

Concluímos que o gráfico não tem assíntotas verticais.

4.2.

$g(x) = f(x) - x + \ln^2 x, \forall x \in IR^+$

Logo $g(x) = x\ln x - x + \ln^2 x, \forall x\in IR^+$

$g'(x) = \ln x + 1 - 1 + 2\ln x \times \frac{1}{x} = \ln x + \frac{2\ln x}{x} = \frac{(x+2)\ln x}{x}, \forall x \in IR^+$

$g'(x) = 0 \wedge x \in \left]0, e\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2=0 \vee \ln x = 0) \wedge x \in \left]0,e\right] \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1		e
g'(x)	n.d.	–	0	+	+
g(x)	n. d.	↘	mín.	↗	Máx.

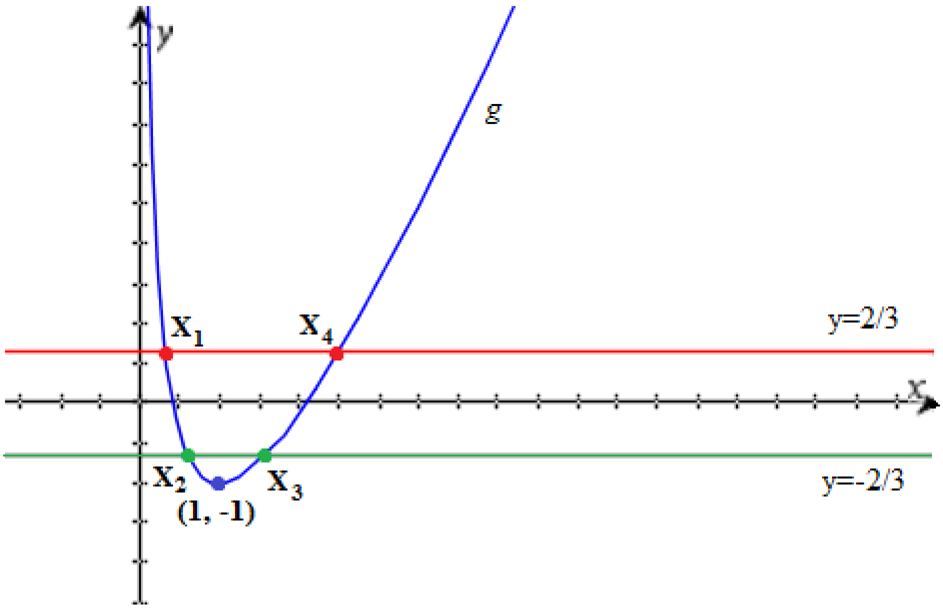
g é estritamente decrescente em $\left]0,1\right]$ e estritamente crescente em $[1,e]$.
Mínimo relativo: $g(1) = -1$
Máximo relativo: $g(e) = 1$

4.3. $g(x) = x\ln x - x + \ln^2 x, \forall x \in IR^+$

$A_{\Delta[ABP]} = \frac{3|g(x)|}{2} = 1 \Leftrightarrow |g(x)| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow g(x) = -\frac{2}{3} \vee g(x) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 \approx 0{,}31 \vee x_2 \approx 0{,}61 \vee x_3 \approx 1{,}56 \vee x_4 \approx 2{,}52$

Gráfico:



5. $C.A.: \lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-2\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2$

logo o gráfico de *g* tem uma A.H. quando $x \to +\infty$ de equação $y=2$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=2$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
g'(x)	–	0	–	0	+
g(x)	↘	Não há extrem	↘	mín.	↗

O gráfico que pode representar a função *g* é o IV.

O gráfico III não pode representar pois a equação da A.H. apresentada é $y=-2$ e deveria ser $y=2$.

O gráfico II não pode representar a função *g* pois *g'* mantém o sinal de *f* (visto que $e^{-x}>0$) pelo que g é estritamente decrescente em $\left]-\infty,2\right]$ e estritamente crescente em $\left[2,+\infty\right[$.

O gráfico I não pode representar a função *g* pois nesse gráfico não temos -1 como zero de *g'*, ou seja, no ponto de abcissa -1 a reta tangente ao gráfico não é horizontal.

6. $g(x)=sen(2x)-\cos x, \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$

$$g'(a)=\frac{1}{2} \wedge a \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[\Leftrightarrow 2\cos(2a)+sen\,a=\frac{1}{2} \wedge a \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\cos^2 a-sen^2 a\right)+sen\,a=\frac{1}{2} \wedge a \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(1-2\,sen^2 a\right)+sen\,a=\frac{1}{2} \wedge a \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\,sen^2 a+sen\,a+2=\frac{1}{2} \wedge a \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8\,sen^2 a+2\,sen\,a+3=0 \wedge a \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(sen\,a=\frac{-2-10}{-16} \vee sen\,a=\frac{-2+10}{-16}\right) \wedge a \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(sen\,a=\frac{3}{4} \vee sen\,a=-\frac{1}{2}\right) \wedge a \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$$

Como $a \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ *vem que* $sen\,a<0$ *pelo que* $sen\,a=\frac{3}{4}$ *é impossível.*

$$sen\,a=-\frac{1}{2} \wedge a \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[\Leftrightarrow sen\,a=sen\left(-\frac{\pi}{6}\right) \wedge a \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[\Leftrightarrow a=-\frac{\pi}{6}$$

7. $D_f=[-a,a], a>0$

$f(-a)=f(a)$

$f(a)>f(0) \Leftrightarrow f(a)-f(0)>0$

$f(x)=f(x+a) \Leftrightarrow f(x)-f(x+a)=0 \Leftrightarrow g(x)=0$, com g: $[-a,0] \rightarrow IR$ definida por $g(x)=f(x)-f(x+a)$.

g é contínua em $[-a,0]$, pois é a diferença de funções contínuas. Temos:

$$g(-a)=f(-a)-f(0)=f(a)-f(0)>0$$
$$g(0)=f(0)-f(a)=-(f(a)-f(0))<0$$

Logo, $g(-a)\times g(0)<0$, assim pelo corolário do Teorema de Bolzano vem que:
$\exists c \in]-a,0[: g(c)=0 \Leftrightarrow \exists c \in]-a,0[: f(c)=f(c+a)$.