GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/Época Especial

14 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2012

Página em branco

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respetivas respostas.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Uma sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita dá o mesmo número designa-se por capicua. Por exemplo, 103301 é capicua.

Quantos números com seis algarismos são capicuas?

(A) 729 **(B)** 900 **(C)** $810\,000$ **(D)** $900\,000$

2. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	-1	0	1
$P(X=x_i)$	$1-3a$	$2a$	a

Sabe-se que $P(X=0 \vee X=1)=0{,}81$

Qual é o valor médio de X?

(A) $0{,}46$ **(B)** $0{,}27$ **(C)** $0{,}08$ **(D)** 0

3. Considere um dado cúbico, com as faces numeradas de 1 a 6, e um saco que contém cinco bolas, indistinguíveis ao tato, cada uma delas numerada com um número diferente: 0, 1, 2, 3 e 4.

Lança-se o dado uma vez e retira-se, ao acaso, uma bola do saco, registando-se os números que saíram.

Qual é a probabilidade de o produto desses números ser igual a zero?

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{15}$ **(C)** $\frac{1}{30}$ **(D)** $\frac{1}{5}$

4. Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico de h'', segunda derivada de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$

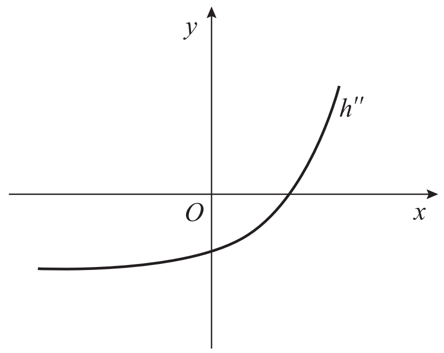
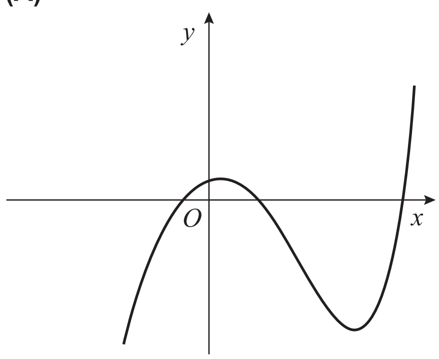


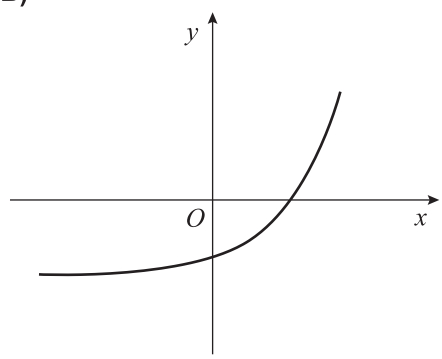
Figura 1

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h?

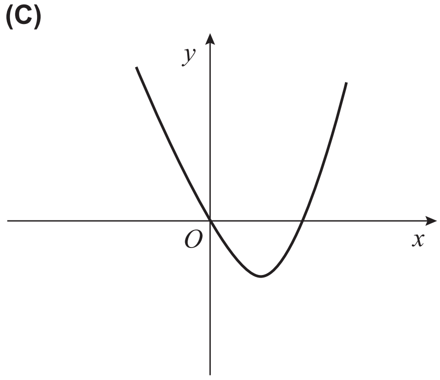
(A)



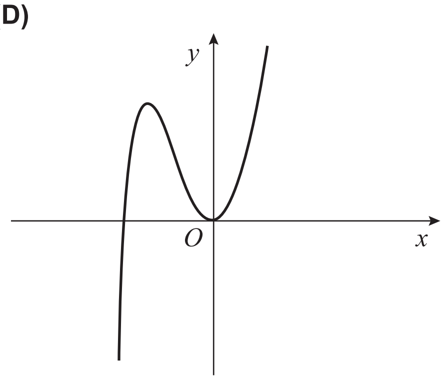
(B)



(C)



(D)



5. Sejam f e g funções de domínio $]0, +\infty[$

Sabe-se que:

- a reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal do gráfico de f
- f não tem zeros;
- $g(x) = \dfrac{e^{-x} - 3}{f(x)}$

Qual das opções seguintes define uma assíntota horizontal do gráfico de g?

(A) $y = 3$ **(B)** $y = e$ **(C)** $y = 0$ **(D)** $y = -1$

6. Sejam a, b e c três números tais que $a \in]1, +\infty[$, $b \in \mathbb{R}^+$ e $c \in \mathbb{R}^+$

Sabe-se que $\log_a b = c$ e que $\log_a \sqrt{c} = 3$

Qual das expressões seguintes é equivalente a $\log_a \sqrt{b \times c}$?

(A) $c + 3$ **(B)** $c - 3$ **(C)** $\dfrac{c}{2} + 3$ **(D)** $\dfrac{c}{2} - 3$

7. Sejam k e p dois números reais tais que os números complexos $z = 1 + i$ e $w = (k-1) + 2p\,i^{11}$ sejam inversos um do outro.

Qual é o valor de $k + p$?

(A) $-\dfrac{1}{4}$ **(B)** $\dfrac{1}{2}$ **(C)** $\dfrac{5}{4}$ **(D)** $\dfrac{7}{4}$

8. Na Figura 2, estão representadas, no plano complexo, uma circunferência, de centro na origem e de raio 1, e uma reta r, definida por $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$

Seja z_1 o número complexo cuja imagem geométrica está no 1.º quadrante e é o ponto de intersecção da circunferência com a reta r

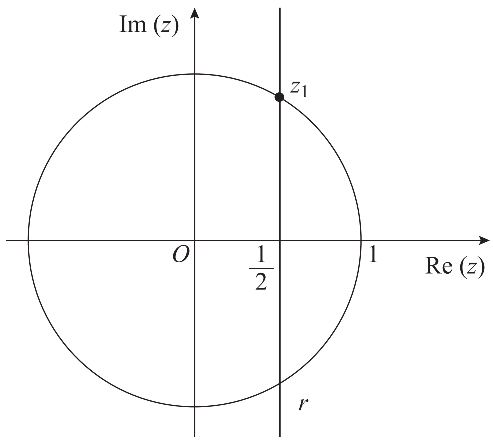


Figura 2

Qual das opções seguintes apresenta uma equação de que z_1 é solução?

(A) $|z-1| = |z-i|$ **(B)** $\operatorname{Im}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **(C)** $\left|z - \frac{1}{2}\right| = 1$ **(D)** $|1-z| = \sqrt{2}$

Página em branco

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Resolva os itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

1.1. Considere o número complexo $z = 8\sqrt{3} - 8i$

Determine as raízes de índice 4 de z

Apresente as raízes na forma trigonométrica.

1.2. Seja w um número complexo não nulo.

Mostre que, se o conjugado de w é igual a metade do inverso de w, então a imagem geométrica de w pertence à circunferência de centro na origem e de raio $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2. Considere uma empresa em que:

- 80% dos funcionários apostam no euromilhões;
- dos funcionários que apostam no euromilhões, 25% apostam no totoloto;
- 5% dos funcionários não apostam no euromilhões nem no totoloto.

2.1. Determine a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, um funcionário dessa empresa, ele apostar no totoloto.

2.2. Considere agora que essa empresa tem 50 funcionários.

Escolhem-se, ao acaso, oito funcionários dessa empresa.

Determine a probabilidade de, pelo menos, sete desses funcionários serem apostadores no euromilhões.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Mostre que, se A e B são dois acontecimentos independentes, então

$$P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A}) \times \left(1 - P(B)\right) = P(\overline{A})$$

4. Admita que a concentração de um produto químico na água, em gramas por litro, t minutos após a sua colocação na água, é dada, aproximadamente, por

$$C(t) = 0{,}5t^2 \times e^{-0{,}1t}, \text{ com } t \geq 0$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

4.1. Mostre que, durante os primeiros 15 minutos após a colocação desse produto químico na água, houve, pelo menos, um instante em que a concentração do produto foi 13 gramas por litro.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

4.2. Determine o valor de t para o qual a concentração desse produto químico na água é máxima.

5. Considere as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por

$$f(x) = -x + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ e^k - 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{com } k \in \mathbb{R}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

5.1. Determine k de modo que a função g seja contínua.

5.2. Determine, em $]-2\pi, 5\pi[$, as soluções da equação $2f'(x) = \left(f(x) + x\right)^2 - 1$

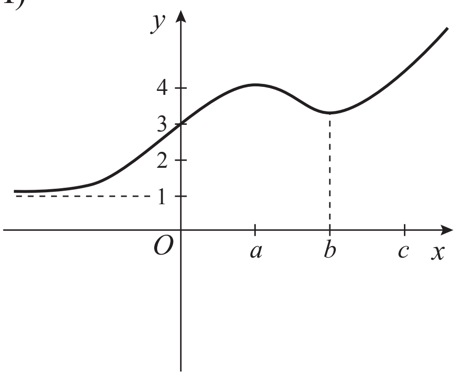
6. Considere, num referencial o. n. xOy, o gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$

Sabe-se que:

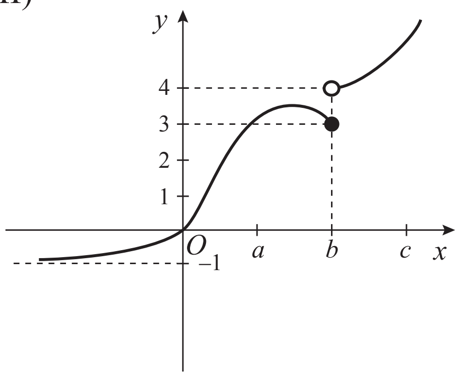
- a, b e c são números reais positivos e $a < b < c$
- h tem um mínimo relativo em $]a, c[$
- h é crescente em $]-\infty, 0[$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(h(x) - 1\right) = 0$
- a segunda derivada, h'', da função h é tal que $h''(x) > 0$ para $x > b$

Apenas uma das opções seguintes pode representar uma parte do gráfico da função h

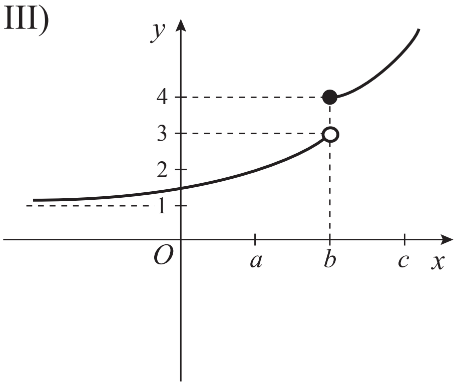
I)



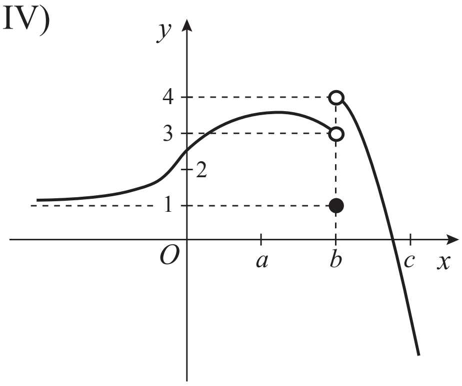
II)



III)



IV)



Elabore uma composição na qual:

- indique a opção que pode representar h
- apresente três razões para rejeitar as restantes opções, uma por cada opção rejeitada.

7. Considere, num referencial o. n. xOy, o gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$f(x) = e^{0,1\,x} + \ln\left(3\,x + 1\right)$$

Seja P um ponto do gráfico de f

A distância do ponto P à origem é igual a 2

Determine a abcissa do ponto P, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto P com arredondamento às centésimas.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** .... (8 × 5 pontos)	40 pontos	
		40 pontos

GRUPO II

1.		
1.1.	15 pontos	
1.2.	15 pontos	
2.		
2.1.	15 pontos	
2.2.	15 pontos	
3.	15 pontos	
4.		
4.1.	10 pontos	
4.2.	15 pontos	
5.		
5.1.	15 pontos	
5.2.	15 pontos	
6.	15 pontos	
7.	15 pontos	
		160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**