

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA
(PROVA 635) 2ªFASE**

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	A	C	B	A	D	B	D	B
Versão 2	C	A	D	D	A	C	B	D

1. Selecionado 4 das 7 posições para a posição das letras «a» e depois 1 das restantes 3 posições para a posição do número «2», as restantes 2 posições serão preenchidas com números «5».

Assim ${}^7C_3 \times 3 = 105$ é um cálculo possível.

Existem 105 códigos diferentes nas condições do enunciado.

2. De acordo com a informação do enunciado relativa ao valor médio, sabemos que:

$$0 \times b^3 + 1 \times a + 2 \times 2a = \frac{35}{24} \Leftrightarrow a + 4a = \frac{35}{24} \Leftrightarrow 5a = \frac{35}{24} \Leftrightarrow a = \frac{7}{24}$$

Como a soma das probabilidades tem que ser 1, temos que:

$$b^3 + a + 2a = 1 \Leftrightarrow b^3 + 3a = 1 \Leftrightarrow b^3 + 3\left(\frac{7}{24}\right) = 1 \Leftrightarrow b^3 = 1 - \frac{21}{24} \Leftrightarrow b^3 = \frac{3}{24} \Leftrightarrow b^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

3. A linha do Triângulo de Pascal em causa é composta pelos elementos do tipo ${}^{111}C_k$ e sabemos que a linha tem 112 elementos.

Os primeiros elementos da linha são ${}^{111}C_0 = 1$, ${}^{111}C_1 = 111$, ${}^{111}C_2 = 6105$ e ${}^{111}C_3 = 221815$. É possível concluir que apenas os três primeiros são inferiores a 10^5 . Atendendo às propriedades do triângulo de Pascal também os três últimos são inferiores a 10^5 .

Assim, existem 6 números inferiores a 10^5 num total de 112 da linha em causa, logo $112 - 6 = 106$ são maiores do que 10^5 .

Logo a probabilidade pedida é $\frac{106}{112} = \frac{53}{56}$.

4. Como (x_n) é uma sucessão de termos em $]-1, 1[$ e $\lim(x_n) = 1$. Sabemos que os termos da sucessão são inferiores a 1, pelo que $\lim(f(x_n)) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

Logo, por observação do gráfico é possível afirmar que $\lim(f(x_n)) = +\infty$.

5. Sabemos que o declive m da reta tangente ao gráfico de uma função é dado pela valor da sua derivada no ponto de tangência

$$\text{Como } f'(x) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{x+6}{3}} = \frac{1}{x+6} .$$

$$\text{Temos que } m = f'(a) = \frac{1}{a+6} .$$

Também sabemos que o declive de uma reta é dado pela tangente da sua inclinação α , pelo que

$$m = \tan \alpha = \tan \frac{\pi}{4} = 1 .$$

$$\text{Logo } m = f'(a) \Leftrightarrow \frac{1}{a+6} = 1 \Leftrightarrow 1 = a+6 \wedge a \neq -6 \Leftrightarrow a = -5 .$$

6. Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ a reta de equação $x=1$ é assíntota do gráfico de f .

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x+1)) = 0$ então a reta de equação $y=2x+1$ é, também, assíntota do gráfico de f .

7.

$$z_1 \times \overline{z_2} = (2+i)(\overline{3-ki}) = (2+i)(3+ki) = 6+2ki+3i+ki^2 = (6-k) + i(2k+3)$$

Para que $z_1 \times \overline{z_2}$ seja um imaginário puro, $6-k=0$.

Ou seja $k=6$.

8. Seja z o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto A e w o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto F.

$$\text{Assim, } z = 3\text{cis}\left(\frac{3}{2}\pi\right) .$$

Como o polígono tem nove lados, $\arg(w) = \arg(z) + 2\pi \times \frac{5}{9}$

$$\text{Logo, } \arg(w) = \arg(z) + \frac{10\pi}{9} = -\frac{\pi}{2} + \frac{10\pi}{9} = \frac{11\pi}{18} .$$

$$\text{Como } |w| = |z| = 3, \text{ temos que } w = 3\text{cis}\left(\frac{11\pi}{18}\right) .$$

Grupo II

1.

1.1.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3} \times i^{4n-6} + 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)} &= \frac{\sqrt{3} \times i^{-6} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)}{2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{i^2} + \sqrt{3} - i}{2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3} - i}{2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \\ &= \frac{-i}{2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{1}{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{7\pi}{10}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{cis}\left(\frac{13\pi}{10}\right) \end{aligned}$$

1.2.

$$z_1 = \operatorname{cis} \alpha = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$z_2 = \operatorname{cis}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha + i \cos \alpha$$

$$z_1 + z_2 = \cos \alpha + i \sin \alpha + (-\sin \alpha + i \cos \alpha) = (\cos \alpha - \sin \alpha) + i(\sin \alpha + \cos \alpha)$$

Como $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\sin \alpha > \cos \alpha, \text{ logo } \cos \alpha - \sin \alpha < 0$$

$$\cos \alpha > 0, \sin \alpha > 0, \text{ pelo que: } \cos \alpha + \sin \alpha > 0$$

Como $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) < 0$ e $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) > 0$, então $z_1 + z_2 \in 2^\circ Q$

2.

2.1.

Seja A: a massa, em gramas, de um pacote de açúcar está compreendida entre 5,7 e 7,3

$$P(A) = P(5,7 < Y < 7,3) = 0,9545$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,9545 = 0,0455$$

Seja X o número de pacotes com massa, em gramas, compreendida entre 5,7 e 7,3 em 10 pacotes.

$$P(X = 8) = {}^{10}C_8 \times (0,9545)^8 \times (0,0455)^2 \approx 0,064$$

2.2.

Como o número de grupos diferentes, formados de modo a que pelo menos uma das duas irmãs não faça parte, corresponde ao número total de grupos que se podem formar com exceção daqueles em que as duas irmãs estão presentes, a resposta I representa precisamente essa diferença entre a totalidade de grupos diferentes de 30 funcionários que se podem formar de entre os 500 existentes, e o número de grupos diferentes que se podem formar, nos quais as duas irmãs estão incluídas.

Na resposta II, $2 \times {}^{498}C_{29}$ representa o número de grupos diferentes que se podem formar nos quais uma das irmãs está presente. ${}^{498}C_{30}$ representa o número de grupos diferentes formados por funcionários, excluindo qualquer uma das duas irmãs. Assim, $2 \times {}^{498}C_{29} \times {}^{498}C_{30}$ representa, igualmente, o número de grupos diferentes, nos quais pelo menos uma das duas irmãs não pertence ao grupo.

3.

$$\begin{aligned} P(\overline{A \cap B} | B) + P(A | B) &= \frac{P((\overline{A \cup B}) \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{P\left(\overline{(A \cap B) \cup (B \cap B)}\right)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{(P(B) - P(A \cap B)) + P(A \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \end{aligned}$$

4.

4.1.

$$f(0) = 1 - e^{k+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{4x}}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{4x} - 1}{x} = -4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{4x} - 1}{4x}$$

Seja $4x = y$. Quando $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$, pelo que: $-4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = -4 \times 1 = -4$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, então: $-4 = 1 - e^{k+1} \Leftrightarrow e^{k+1} = 5 \Leftrightarrow k + 1 = \ln 5 \Leftrightarrow k = -1 + \ln 5$

4.2.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -4$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{1 - \sqrt{1 - x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin x}{1 - \sqrt{1 - x^3}} \times \frac{1 + \sqrt{1 - x^3}}{1 + \sqrt{1 - x^3}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x \times (1 + \sqrt{1 - x^3})}{1 - (\sqrt{1 - x^3})^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x \times (1 + \sqrt{1 - x^3})}{1 - 1 + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1 + \sqrt{1 - x^3})}{x^2} = 1 \times \frac{2}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

Assim sendo, $x=0$ é a única assíntota vertical do gráfico da função f dado esta ser contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4.3.

$$g'(x) = f(x) - \frac{1}{x} = \frac{1 - e^{4x}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1 - e^{4x} - 1}{x} = -\frac{e^{4x}}{x}$$

$$g''(x) = \frac{-4e^{4x} \times x + e^{4x}}{x^2} = \frac{e^{4x}(-4x + 1)}{x^2}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{4x}(-4x + 1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow e^{4x}(-4x + 1) = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{4x} = 0 \vee -4x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

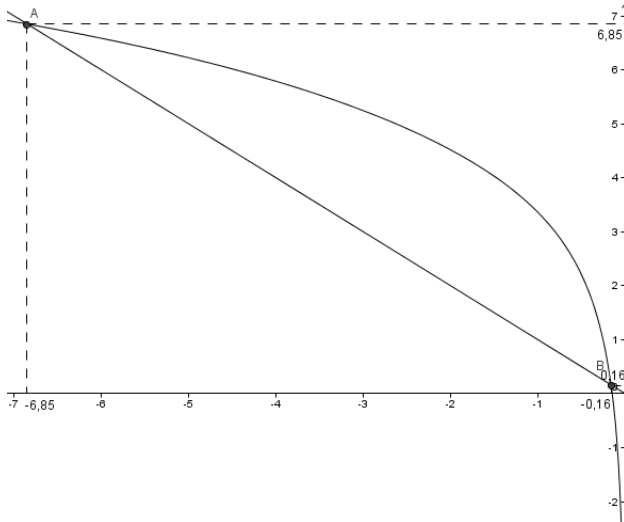
x	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$g''(x)$	+	0	-
$g(x)$	∪	P.I	∩

Ponto de inflexão para $x = \frac{1}{4}$

Concavidade voltada para cima em $x \in \left] 0, \frac{1}{4} \right[$

Concavidade voltada para baixo em $x \in \left] \frac{1}{4}, +\infty \right[$

5.



$$d = \sqrt{(-0,16 - (-6,85))^2 + (0,16 - 6,85)^2} \approx 9,46 u.c.$$

6.

6.1.

Os triângulos $[ABE]$, $[BCF]$, $[CDG]$ e $[DAH]$ são geometricamente iguais ou congruentes.

Seja M o ponto médio de $[AB]$.

$$\tan x = \frac{\overline{ME}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \tan x = \frac{\overline{ME}}{2} \Leftrightarrow \overline{ME} = 2 \tan x$$

$$A_{\Delta[ABE]} = \frac{4 \times 2 \tan x}{2} = 4 \tan x$$

$$a(x) = 16 - 4 \times 4 \tan x \Leftrightarrow a(x) = 16 - 16 \tan x \Leftrightarrow a(x) = 16(1 - \tan x) \text{ c.q.d.}$$

6.2.

A função a é contínua em $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, pelo que também o será em $\left]\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{5}\right[$.

Como $a\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 11,71$ e $a\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx 4,38$, então, pelo Teorema de Bolzano, existe pelo menos um

$$x \in \left]\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{5}\right[, \text{ tal que } a(x) = 5.$$

FIM