Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/Época Especial 12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2011

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 3, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\dfrac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$

(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\ r\ g$

(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\ \pi\ r^2$

(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Num determinado clube desportivo praticam-se apenas dois desportos, futebol e andebol. Dos jovens inscritos nesse clube, 28 jogam apenas futebol, 12 jogam apenas andebol e 12 jogam futebol e andebol. Escolhe-se, ao acaso, um dos jovens inscritos.

Qual é a probabilidade de o jovem escolhido jogar andebol sabendo que joga futebol?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{3}{10}$ **(C)** $\frac{7}{10}$ **(D)** $\frac{3}{7}$

2. Lança-se cinco vezes consecutivas um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e regista-se, em cada lançamento, o número inscrito na face voltada para cima.

Considere os acontecimentos seguintes.

I: «sair face ímpar em exactamente dois dos cinco lançamentos»;

J: «sair face 4 em exactamente dois dos cinco lançamentos».

Qual dos acontecimentos seguintes é mais provável?

(A) acontecimento I

(B) acontecimento $\overline{I}$

(C) acontecimento J

(D) acontecimento $\overline{J}$

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$ incompatíveis.

Sabe-se que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}3$ e que $P(A) = 0{,}5$

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) $0{,}2$ **(B)** 0 **(C)** $0{,}5$ **(D)** $0{,}4$

4. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, contínua em todo o seu domínio.

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -2$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x) + 2x\right) = 0$

Em qual das opções seguintes as equações definem duas assimptotas do gráfico de f ?

(A) $x = -2$ e $y = 1$

(B) $x = 3$ e $y = -2x$

(C) $y = -2x$ e $y = 1$

(D) $y = 2x$ e $y = -1$

5. Para um certo número real a, seja a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 - 1$

Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função f'', segunda derivada da função f

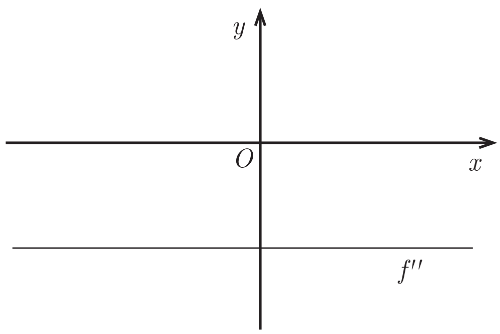


Figura 1

Qual dos valores seguintes pode ser o valor de a?

(A) 0

(B) π

(C) 3

(D) -3

6. Na Figura 2, estão representados, num referencial o. n. xOy, uma circunferência e o triângulo $[OAB]$

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- a circunferência tem centro no ponto O e raio 1
- A é o ponto de coordenadas $(-1,\, 0)$
- B pertence à circunferência e tem ordenada negativa;
- o ângulo AOB tem amplitude igual a $\frac{2\pi}{3}$ radianos.

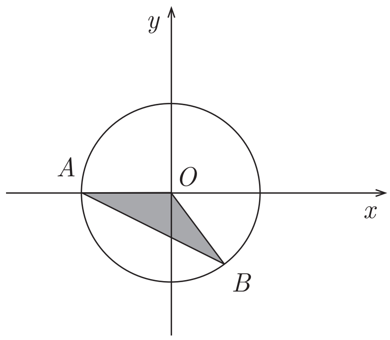


Figura 2

Qual é a área do triângulo $[OAB]$?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\sqrt{3}$

7. Sejam k e p dois números reais e sejam $z_1 = (3k+2) + p\,i$ e $z_2 = (3p-4) + (2-5k)i$ dois números complexos.

Quais são os valores de k e de p para os quais z_1 é igual ao conjugado de z_2 ?

(A) $k = -1$ e $p = 3$

(B) $k = 1$ e $p = 3$

(C) $k = 0$ e $p = -2$

(D) $k = 1$ e $p = -3$

8. Considere, em $\mathbb{C}$, um número complexo w

No plano complexo, a imagem geométrica de w é o vértice A do octógono $[ABCDEFGH]$, representado na Figura 3.

Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice 8 de um certo número complexo.

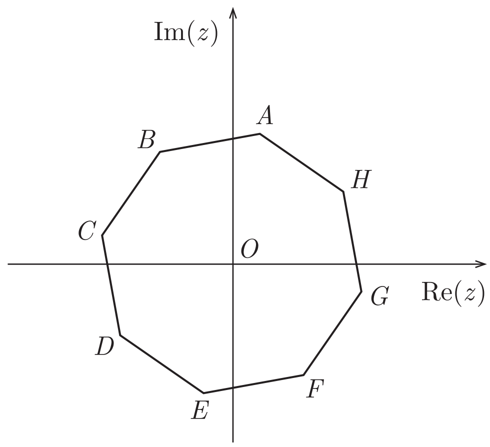


Figura 3

Qual dos números complexos seguintes tem como imagem geométrica o vértice C do octógono $[ABCDEFGH]$?

(A) $-w$

(B) $w + 1$

(C) $i \times w$

(D) $i^3 \times w$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

---

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

1.1. Considere $z_1 = 2 + \sqrt{3}\, i + i^{4n+2014}, \quad n \in \mathbb{N}$

Sabe-se que z_1 é uma das raízes cúbicas de um certo complexo z

Determine z

Apresente o resultado na forma algébrica.

1.2. Considere $z_2 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

No plano complexo, a região definida pela condição $|\,z - z_2| \leq 1 \ \wedge\ \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq 2\pi \ \wedge\ |z| \geq |z - z_2|$ está representada geometricamente numa das opções I, II, III e IV, apresentadas na página seguinte.

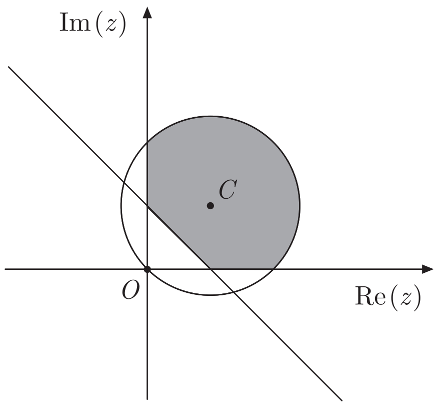
(Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $]0, 2\pi]$)

Sabe-se que, em cada uma das opções:

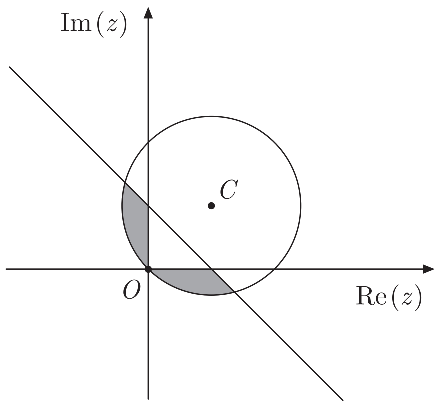
- O é a origem do referencial;
- C é a imagem geométrica de z_2
- $\overline{OC}$ é o raio da circunferência.

Apenas uma das opções está correcta.

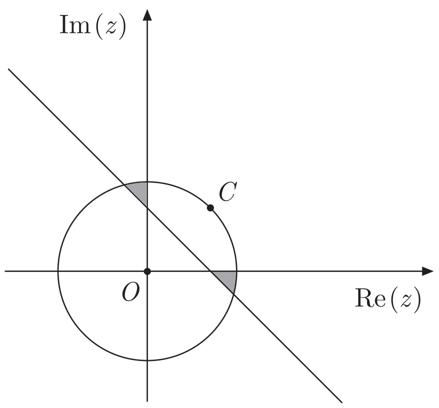
I



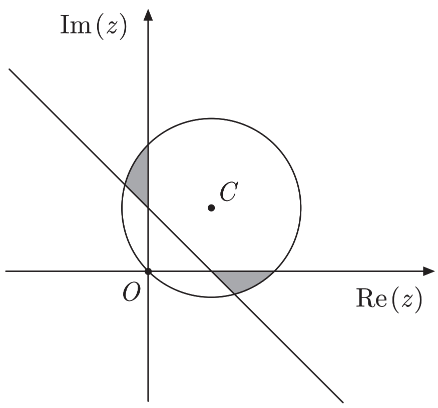
II



III



IV



Elabore uma composição na qual:

- indique a opção correcta;
- apresente as razões que o levam a rejeitar as restantes opções.

Apresente três razões, uma por cada opção rejeitada.

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos tais que $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, com $P(B) \neq 0$

Mostre que $P\left(\overline{A \cap B} \mid B\right) = P\left(\overline{A} \mid B\right)$

3. Considere as 13 cartas do naipe de copas: ás, três figuras (rei, dama e valete) e mais nove cartas (do 2 ao 10).

3.1. As cartas vão ser dispostas, ao acaso, sobre uma mesa, lado a lado, de modo a formarem uma sequência de 13 cartas.

Determine o número de sequências diferentes que é possível construir, de modo que as três figuras fiquem juntas.

3.2. Determine a probabilidade de, ao retirar, ao acaso, 4 das 13 cartas do naipe de copas, obter pelo menos duas figuras.

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Para um certo valor real de $k,$ admita que a quantidade de combustível, em litros, existente no depósito de uma certa máquina agrícola, t minutos após ter começado a funcionar, é dada aproximadamente por

$$Q(t) = 12 + \log_3(81 - k\,t^2), \quad \text{com} \quad t \in [0, 20]$$

Considere que essa máquina agrícola funcionou durante 20 minutos e que, nesse período de tempo, consumiu 2 litros de combustível.

Determine o valor de k recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

5. Considere a função $f,$ de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{1-e^{x+1}} + 1 & \text{se } x \neq -1 \\ a+2 & \text{se } x = -1 \end{cases} \qquad (a \text{ é um número real.})$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

5.1. Determine a sabendo que f é contínua em $x = -1$

5.2. Seja f' a primeira derivada de f

Mostre, sem resolver a equação, que $f'(x) = \dfrac{1}{4}$ tem, pelo menos, uma solução em $]0, 1[$

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

6. De duas funções f e g sabe-se que:

- f tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $f(x) = \pi - 4\operatorname{sen}(5x)$
- g tem domínio $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$ e g', primeira derivada de g, tem domínio $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$ e é definida por

  $g'(x) = \log_2\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)$

Resolva os itens **6.1.** e **6.2.** recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

6.1. Calcule o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{f(x) - \pi}$

6.2. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão no intervalo $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$

Resolva o item **6.3.** recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

6.3. Seja h a função, de domínio $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$, definida por $h(x) = f(x) - g(x)$

O ponto A pertence ao gráfico da função h

Sabe-se que a recta tangente ao gráfico da função h no ponto A é paralela ao eixo Ox

Determine a abcissa do ponto A.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto com arredondamento às décimas.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

(8 × 5 pontos)	40 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	15 pontos
2.	15 pontos
3.	
3.1.	10 pontos
3.2.	15 pontos
4.	15 pontos
5.	
5.1.	15 pontos
5.2.	15 pontos
6.	
6.1.	15 pontos
6.2.	15 pontos
6.3.	15 pontos
	160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**