
Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase

15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2011

VERSÃO 1

Página em branco

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova. A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$

(r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen} a \cdot \text{cos} b + \text{sen} b \cdot \text{cos} a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos} a \cdot \text{cos} b - \text{sen} a \cdot \text{sen} b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg} a + \text{tg} b}{1 - \text{tg} a \cdot \text{tg} b}$

Complexos

$(\rho \text{cis } \theta)^n = \rho^n \text{cis}(n\theta)$

$n\sqrt{\rho \text{cis } \theta} = n\sqrt{\rho} \text{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), k \in \{0, \dots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen } u)' = u' \cdot \text{cos } u$

$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\text{cos}^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$) independentes, com $P(A) \neq 0$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) $P(A) + P(B) = 1$

(B) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(C) $P(A) \neq P(B)$

(D) $P(B | A) = P(B)$

2. O código de um auto-rádio é constituído por uma sequência de quatro algarismos. Por exemplo, 0137

Quantos desses códigos têm dois e só dois algarismos iguais a 7 ?

(A) 486

(B) 810

(C) 432

(D) 600

3. Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função g , de domínio $]-3, +\infty[$

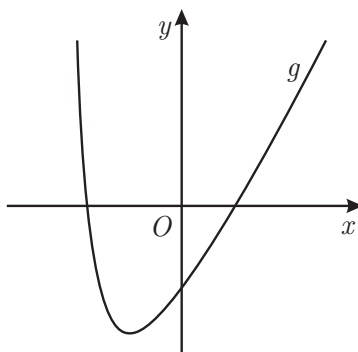


Figura 1

A recta de equação $y = 2x - 4$ é assíntota do gráfico de g

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x - 4) = 0$

(B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{g(x)} = 2$

(C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x + 4) = 0$

(D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = 0$

4. Seja f uma função de domínio $[0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 9 & \text{se } 0 \leq x < 5 \\ \frac{1 - e^x}{x} & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f ?

- (A) $]0, 1[$ (B) $]1, 4[$ (C) $]4, 6[$ (D) $]6, 7[$

5. Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right)$?

- (A) 4
- (B) 0
- (C) $\frac{1}{4}$
- (D) $\frac{1}{2}$

6. Na Figura 2, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função polinomial f de grau 3, de domínio \mathbb{R}

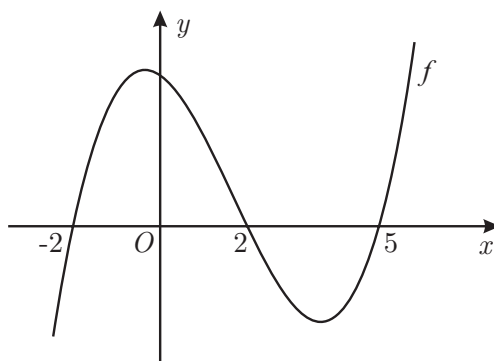


Figura 2

Sabe-se que:

- -2 , 2 e 5 são zeros de f
- f' representa a função derivada de f

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $f'(0) \times f'(6) = 0$
- (B) $f'(-3) \times f'(6) < 0$
- (C) $f'(-3) \times f'(0) > 0$
- (D) $f'(0) \times f'(6) < 0$

7. Na Figura 3, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos z_1 , z_2 , z_3 e z_4

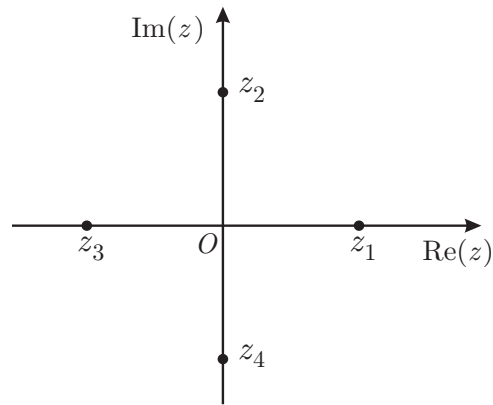


Figura 3

Qual é o número complexo que, com $n \in \mathbb{N}$, pode ser igual a $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2}$?

- (A) z_1
- (B) z_2
- (C) z_3
- (D) z_4

8. Na Figura 4, está representado, no plano complexo, a sombreado, um sector circular.

Sabe-se que:

- o ponto A está situado no 1.º quadrante;
- o ponto B está situado no 4.º quadrante;
- $[AB]$ é um dos lados de um polígono regular cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 5 do complexo $32 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$
- o arco AB está contido na circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a \overline{OA}

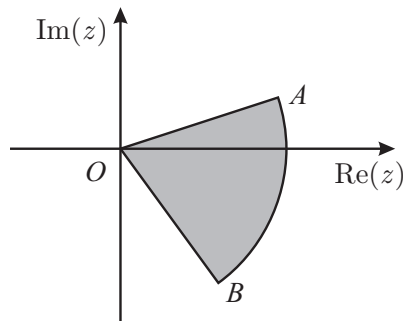


Figura 4

Qual dos números seguintes é o valor da área do sector circular AOB ?

- (A) $\frac{\pi}{5}$
- (B) $\frac{4\pi}{5}$
- (C) $\frac{2\pi}{5}$
- (D) $\frac{8\pi}{5}$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 5i \quad \text{e} \quad z_3 = \text{cis}\left(\frac{n\pi}{40}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

1.1. O complexo z_1 é raiz do polinómio $z^3 - z^2 + 16z - 16$

Determine, em \mathbb{C} , as restantes raízes do polinómio.

Apresente as raízes obtidas na forma trigonométrica.

1.2. Determine o menor valor de n natural para o qual a imagem geométrica de $z_2 \times z_3$, no plano complexo, está no terceiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

2. Uma companhia aérea vende bilhetes a baixo custo exclusivamente para viagens cujos destinos sejam Berlim ou Paris.

2.1. Nove jovens decidem ir a Berlim e escolhem essa companhia aérea. Cada jovem paga o bilhete com cartão multibanco, ou não, independentemente da forma de pagamento utilizada pelos outros jovens. Considere que a probabilidade de um jovem utilizar cartão multibanco, para pagar o seu bilhete, é igual a 0,6.

Determine a probabilidade de exactamente 6 desses jovens utilizarem cartão multibanco para pagarem o seu bilhete.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

2.2. A companhia aérea constatou que, quando o destino é Berlim, 5% dos seus passageiros perdem o voo e que, quando o destino é Paris, 92% dos passageiros seguem viagem. Sabe-se que 30% dos bilhetes a baixo custo que a companhia aérea vende têm por destino Berlim.

Determine a probabilidade de um passageiro, que comprou um bilhete a baixo custo nessa companhia aérea, perder o voo.

Apresente o resultado na forma de dízima.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), com $P(A) \neq 0$

Mostre que $P(B | A) \geq 1 - \frac{1 - P(B)}{P(A)}$

4. Num museu, a temperatura ambiente em graus centígrados, t horas após as zero horas do dia 1 de Abril de 2010, é dada, aproximadamente, por

$$T(t) = 15 + 0,1t^2 e^{-0,15t}, \quad \text{com } t \in [0, 20]$$

Determine o instante em que a temperatura atingiu o valor máximo recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Apresente o resultado em horas e minutos, apresentando os minutos arredondados às unidades.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

5. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \frac{2 + \ln x}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

- 5.1. O gráfico de f admite uma assíntota horizontal.

Seja P o ponto de intersecção dessa assíntota com a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e .

Determine as coordenadas do ponto P recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

- 5.2. Existem dois pontos no gráfico de f cujas ordenadas são o cubo das abcissas.

Determine as coordenadas desses pontos recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- assinalar esses pontos;
- indicar as coordenadas desses pontos com arredondamento às centésimas.

6. Na Figura 5, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico da função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = 4\cos(2x)$

Sabe-se que:

- os vértices A e D do trapézio $[ABCD]$ pertencem ao eixo Ox
- o vértice B do trapézio $[ABCD]$ pertence ao eixo Oy
- o vértice D do trapézio $[ABCD]$ tem abcissa $-\frac{\pi}{6}$
- os pontos A e C pertencem ao gráfico de f
- a recta CD é paralela ao eixo Oy

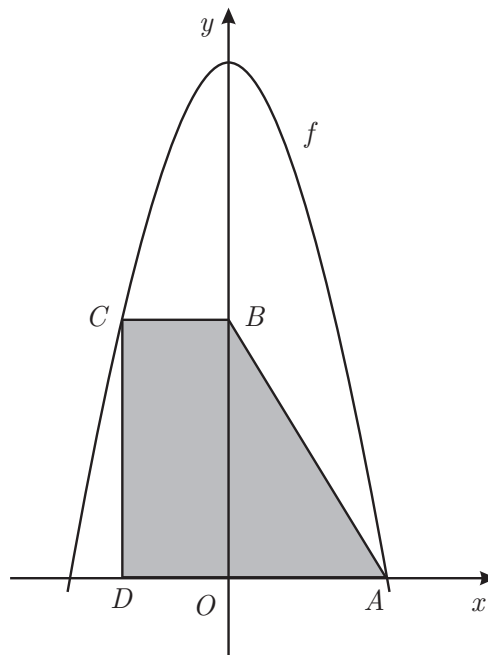


Figura 5

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

6.1. Determine o valor exacto da área do trapézio $[ABCD]$

6.2. Seja f' a primeira derivada da função f , e seja f'' a segunda derivada da função f

Mostre que $f(x) + f'(x) + f''(x) = -4(3\cos(2x) + 2\sin(2x))$, para qualquer número real x

7. Na Figura 6, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico da função g

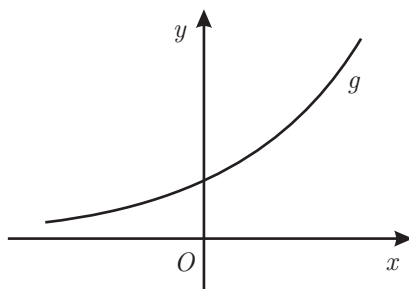


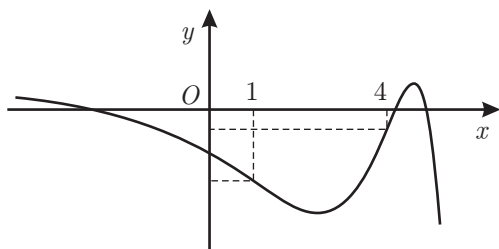
Figura 6

Sabe-se que:

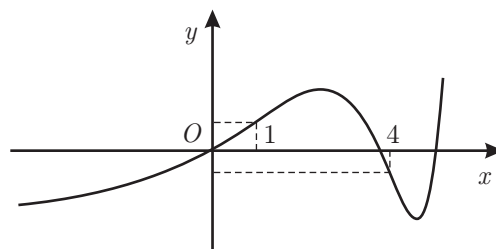
- g é uma função contínua em \mathbb{R}
- g não tem zeros
- a segunda derivada, f'' , de uma certa função f tem domínio \mathbb{R} e é definida por $f''(x) = g(x) \times (x^2 - 5x + 4)$
- $f(1) \times f(4) > 0$

Apenas uma das opções seguintes pode representar a função f

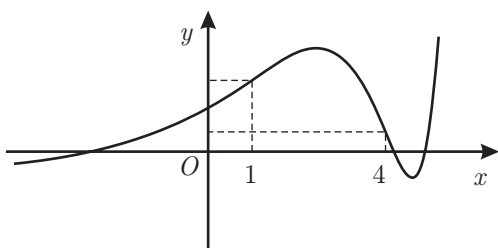
I



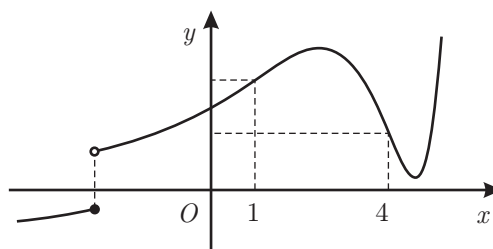
II



III



IV



Elabore uma composição na qual:

- indique a opção que pode representar f
- apresente as razões que o levam a rejeitar as restantes opções

Apresente três razões, uma por cada gráfico rejeitado.

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

.....(8 × 5 pontos).....	40 pontos
	<hr/>
	40 pontos

GRUPO II

1.		
1.1.	15 pontos
1.2.	15 pontos
2.		
2.1.	10 pontos
2.2.	15 pontos
3.	15 pontos
4.	15 pontos
5.		
5.1.	20 pontos
5.2.	15 pontos
6.		
6.1.	15 pontos
6.2.	10 pontos
7.	15 pontos
		<hr/>
		160 pontos

TOTAL **200 pontos**