SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. da República 45 - 3ºesq., 1050–187 Lisboa
Tel. 21 795 1219 / Fax 21 795 2349
www.spm.pt imprensa@spm.pt

Proposta de Resolução da Sociedade Portuguesa de Matemática para o Exame Nacional de Matemática A
Prova 635, 1ª fase – 27 de Junho de 2011

Grupo I

	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	D	A	C	B	C	D	B	B
Versão 2	B	C	A	D	C	A	C	D

Grupo II

1.1.
Utilizando a regra de Ruffini:

	1	−1	16	-16
1		1	0	16
	1	0	16	0 = resto

$$z^3 - z^2 + 16z - 16 = (z-1)(z^2+16) = (z-1)(z+4i)(z-4i)$$

Cálculo auxiliar: $z^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -16 \Leftrightarrow z = -4i \vee z = 4i$

Assim, as raízes do polinómio na forma trigonométrica:

$1 = cis0$, $-4i = 4cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ e $4i = 4cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$

1.2. $z_2 \times z_3 = 5i \times cis\left(\frac{n\pi}{40}\right) = 5cis\left(\frac{\pi}{2}\right) cis\left(\frac{n\pi}{40}\right) = 5cis\left(\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{40}\right)$ como a imagem geométrica de $z_2 \times z_3$ está no terceiro quadrante e pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares vem que $\arg(z_2 \times z_3) = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{40} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{n\pi}{40} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 30 + 80k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Fazendo $k = 0$ temos o menor natural que satisfaz o pretendido que é $n = 30$.

2.1. Seja X a variável aleatória que dá o número de jovens, de entre os 9, que utilizaram cartão multibanco. X segue uma distribuição binomial com $n = 9$ e $p = 0{,}6$.

Assim, $P(X = 6) = {}^9C_6 \times 0{,}6^6 \times 0{,}4^3 \approx 0{,}25$.

2.2. No universo formado pelo conjunto dos passageiros que optam pelo destino Berlim ou Paris, com bilhetes a baixo custo, sejam os acontecimentos:

B: "O destino é Berlim"

P:" O destino é Paris"
V:"Efectua o voo"

Sabe-se que:

$P(\overline{V} \mid B) = 0{,}05$; $P(V \mid P) = 0{,}92$ logo $P(\overline{V} \mid P) = 1 - 0{,}92 = 0{,}08$

$P(B) = 0{,}3$ logo $P(P) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

$$P(\overline{V}) = P(\overline{V} \cap P) + P(\overline{V} \cap B) = P(\overline{V} \mid P) \times P(P) + P(\overline{V} \mid B) \times P(B) = 0{,}08 \times 0{,}7 + 0{,}05 \times 0{,}3 = 0{,}071$$

3. Tendo-se $P(A) > 0$ vem que:

$$P(B \mid A) \geq 1 - \frac{1 - P(B)}{P(A)} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq \frac{P(A) - 1 + P(B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow P(A \cup B) \leq 1$$

O que é verdadeiro, pois a probabilidade de um acontecimento é sempre menor ou igual a 1.

Tendo-se, por equivalência, que $P(B \mid A) \geq 1 - \dfrac{1 - P(B)}{P(A)}$ é também verdadeira.

4. $T'(t) = 0{,}2t \times e^{-0{,}15t} - 0{,}15 \times e^{-0{,}15t} \times 0{,}1t^2 = e^{-0{,}15t}(0{,}2t - 0{,}015t^2),\ t \in [0, 20]$

$$T'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0{,}15t} = 0 \ \vee \ t\,(0{,}2 - 0{,}015t) = 0 \Leftrightarrow t\,(0{,}2 - 0{,}015t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{40}{3}$$

Visto que $e^{-0{,}15t} = 0$ é impossível.

Organizando a informação numa tabela, obtemos:

t	0		$\frac{40}{3}$		20
$T'(t)$	0	+	0	−	$T'(20)$
$T(t)$	$T(0)$	$\nearrow$	Max.	$\searrow$	$T(20)$

De onde concluímos que o instante em que a temperatura atingiu o valor máximo foi em $t = \frac{40}{3}$ horas, o que corresponde a 13horas e 20 minutos.

5. 1. Cálculo da equação da assimptota horizontal do gráfico de f:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{x-1} = \frac{3}{-\infty} = 0$, pelo que $y = 0$ é equação da assimptota horizontal do gráfico de *f*.

Nota: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2 + \ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 + 0 = 0$, donde também se concluía que $y = 0$ é equação da assimptota horizontal do gráfico de *f*.

Cálculo da equação da recta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa e:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - (2 + \ln x)}{x^2} = \frac{-1 - \ln x}{x^2}, \ x > 1, \text{ assim } m = f'(e) = -\frac{2}{e^2}.$$

Sabendo que a recta passa no ponto $T(e, f(e))$, com $f(e) = \frac{3}{e}$, a ordenada na origem, *b*, é dada, pela resolução da equação $f(e) = -\frac{2}{e^2} \times e + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{e}$. Finalmente a equação reduzida da recta é dada por: $y = -\frac{2}{e^2}x + \frac{5}{e}$

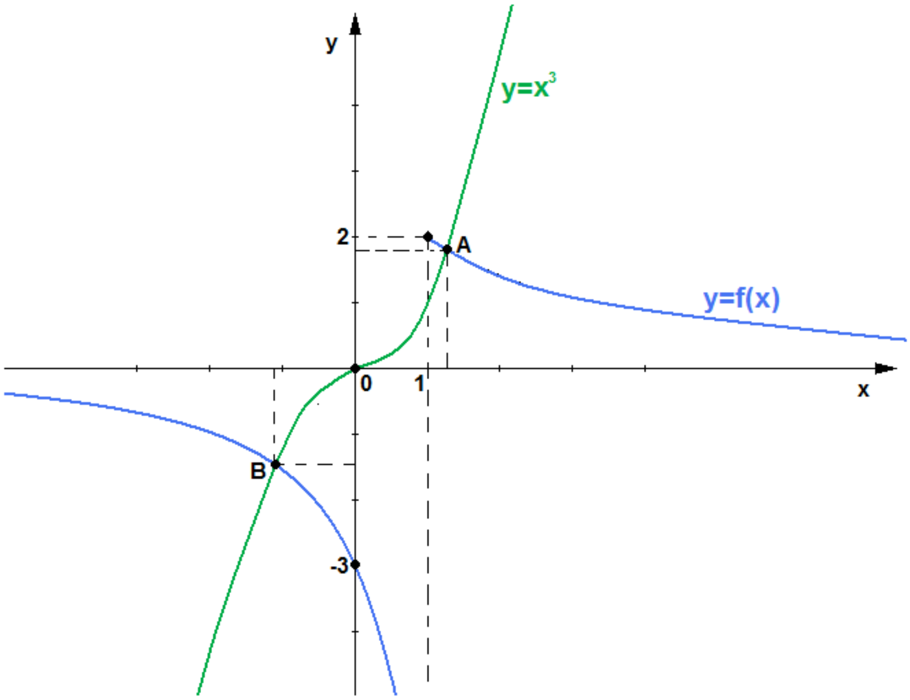
Determinamos agora as coordenadas do ponto P resolvendo o seguinte sistema de duas equações:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = -\frac{2}{e^2}x + \frac{5}{e} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{5e}{2} \end{cases}$$

$$P\left(\frac{5e}{2}, 0\right)$$

5.2. As coordenadas dos pontos referidos correspondem aos pontos dos gráficos cujas abcissas são as soluções da equação $f(x) = x^3$

Recorrendo à calculadora gráfica:



As coordenadas dos pontos pretendidos são:

$A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ em que $a_1 \approx 1{,}22$, $a_2 \approx 1{,}80$, $b_1 \approx -1{,}12$ e $b_2 \approx -1{,}41$

6.1. A área do trapézio é dada por:

$$área = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{CD}$$

A abcissa do ponto A é um zero da função f.

Temos,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z$$

Fazendo $k = 0$ vem que abcissa do ponto A é $\frac{\pi}{4}$ (pois é o primeiro zero positivo da função).

Logo, $\overline{AD} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$; $\overline{BC} = \frac{\pi}{6}$ e $\overline{CD} = f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$.

Logo, $área = \frac{\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{6}}{2} \times 2 = \frac{7\pi}{12}$.

6.2. $f'(x) = 4(-sen(2x)) \times 2 = -8sen(2x), \ \forall x \in IR$

$f''(x) = -8\cos(2x) \times 2 = -16\cos(2x), \ \forall x \in IR$

Logo,

$f(x) + f'(x) + f''(x) = 4\cos(2x) - 8sen(2x) - 16\cos(2x) = -8sen(2x) - 12\cos(2x) =$

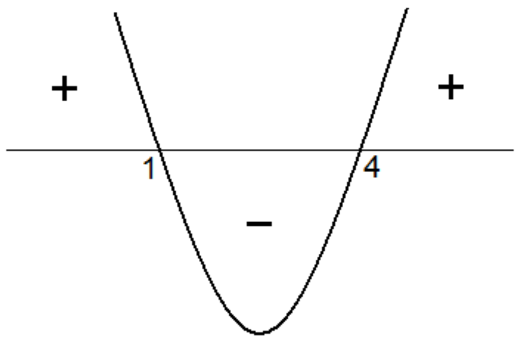
$= -4(3\cos(2x) + 2sen(2x)), \ \forall x \in IR \ \ c.q.d.$

7. A opção que pode representar a função f é a III.

Podemos excluir a opção II visto que por visualização gráfica as imagens de 1 e 4 têm sinais contrários logo $f(1) \times f(4) < 0$, o que contraria a condição dada $f(1) \times f(4) > 0$.

Excluímos a opção IV pois, pelo facto de f'' estar definida em IR, em particular f é duas vezes diferenciável, logo contínua.

A opção I também é excluída porque não respeita o sentido das concavidades do gráfico de *f*. O sentido das concavidades do gráfico de f é obtido pelo estudo do sinal da segunda derivada de *f*. Pelo facto da parte do gráfico de *g* visualizada estar acima do eixo das abcissas e de g ser contínua e não ter zeros, temos que $g(x) > 0, \ \forall x \in IR$. Assim, o sinal de f'' é dado pelo sinal do factor $x^2 - 5x + 4$, obtido no seguinte esboço.



Assim, rejeitamos a opção I pois, por exemplo, no intervalo $\left]1, 4\right[$ a concavidade está voltada para cima e o esboço apresentado indica que deveria estar voltada para baixo.