

Proposta de Resolução da Sociedade Portuguesa de Matemática

para o Exame Nacional de Matemática A

Prova 635, 2ª fase – 19 de Julho de 2010

Grupo I

	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	C	B	D	A	D	C	B	A
Versão 2	B	C	A	D	A	B	C	D

Grupo II

1.1.

$$w = \frac{\left(\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^4 + 4i}{i} = \frac{4 \operatorname{cis}\pi + 4i}{i} = \frac{-4 + 4i}{i} = \frac{-i(-4 + 4i)}{-i^2} = 4 + 4i = 4\left(\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

1.2. $|z - z_2| = r \Leftrightarrow |z - 3| = \sqrt{5}$

C.A.:

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i$$

$P_1(1,1)$ e $P_2(3,0)$ são os afixos de z_1 e z_2 respectivamente. Assim,

$$r = d(P_1, P_2) = \sqrt{(3-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5}$$

2.1. N.º casos possíveis = $6 \times 6 = 36$

$$P(X = -3) = \frac{1 \times 1}{6 \times 6} = \frac{1}{36}; \quad P(X = -2) = \frac{1 \times 1}{6 \times 6} = \frac{1}{36}; \quad P(X = -1) = \frac{4 \times 1 + 1 \times 5}{6 \times 6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4};$$

$$P(X = 0) = \frac{1 \times 5}{6 \times 6} = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 1) = \frac{4 \times 5}{6 \times 6} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

x	-3	-2	-1	0	1
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{9}$

2.2. $P(L|J)$, no contexto do problema, indica a probabilidade do ponto Q pertencer ao 3º quadrante sabendo que o número saído no dado A é negativo (ou seja, o ponto tem abcissa negativa).

Sabendo que o número saído no dado A é negativo o ponto pertencerá ao 2.º ou 3.º quadrantes consoante o número saído no dado B seja positivo ou negativo. Assim, como a probabilidade de sair negativo no dado B corresponde à probabilidade de sair face -1 no mesmo dado, que é $\frac{1}{6}$.

Portanto,

$$P(L|J) = \frac{1}{6}.$$

3.

$$\begin{aligned} \frac{P(A \cup B)}{P(B)} - P(\bar{A}|B) &= \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} - P(\bar{A}|B) = \frac{P(A)}{P(B)} + 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - P(\bar{A}|B) = \\ &= \frac{P(A)}{P(B)} + [1 - P(A|B)] - P(\bar{A}|B) = \frac{P(A)}{P(B)} + P(\bar{A}|B) - P(\bar{A}|B) = \frac{P(A)}{P(B)}. \end{aligned}$$

4.1. Sendo $y = mx + b$ a equação da asymptota oblíqua do gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$, então:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{5}x - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5} - \frac{\ln x}{x} \right) = \frac{1}{5} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$



$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{5}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}x - \ln x - \frac{1}{5}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln x) = -\infty,$$

logo o gráfico não tem asymptotas oblíquas.

4.2.

$$f'(x) = \frac{1}{5} - \frac{1}{x}, \text{ para } x > 2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{5} \wedge x > 2 \Leftrightarrow x = 5$$

x	2		5	$+\infty$
$f'(x)$	n.d.	-	0	+
$f(x)$	n.d.		Mín.	

Assim, f tem um mínimo relativo em $x = 5$.

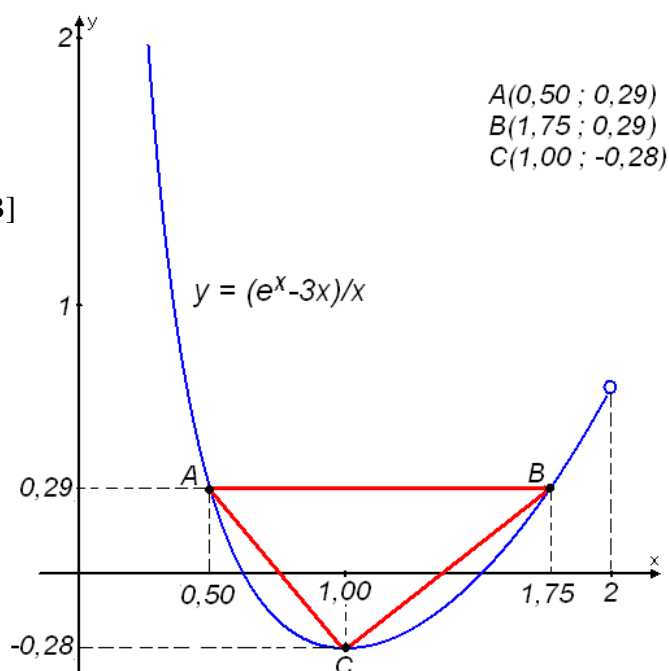
4.3. $f(15) = 3 - \ln 15 \approx 0,29$

$$\overline{AB} \approx 1,75 - 0,50 = 1,25$$

A altura do triângulo relativamente à base [AB] é dada por: $h \approx 0,29 - (-0,28) = 0,57$

Assim, a área do triângulo [ABC] é dada por:

$$A \approx \frac{1,25 \times 0,57}{2} \approx 0,4 \text{ (aproximação às décimas).}$$



5.1. f é contínua em \mathbb{R} , por ser a soma de funções contínuas, logo f é contínua em $[-2, -1]$.

$$f(-2) = 2 + e^{-17} \approx 2,000$$

$$f(-1) = 1 + e^{-3} \approx 1,050$$

$1,5 \in]f(-1), f(-2)[$ logo, pelo Teorema de Bolzano, $\exists c \in]-2, -1[: f(c) = 1,5$.

5.2. $f'(x) = -1 + 6x^2 e^{2x^3-1}$

$$m = f'(0) = -1$$

$f(0) = \frac{1}{e}$, logo $b = \frac{1}{e}$ e assim, $y = -x + \frac{1}{e}$ é equação reduzida da recta pedida.

6.1. Se $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $h(\theta) = \overline{AC} = \overline{AO} - \overline{CO} = 3 - 3 \cos \theta$, pois $\frac{\overline{CO}}{3} = \cos \theta$. Por outro lado, se

$$\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[, h(\theta) = \overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OC} = 3 + 3 \cos(\pi - \theta) = 3 - 3 \cos \theta, \text{ pois } \frac{\overline{CO}}{3} = \cos(\pi - \theta).$$

Assim, $h(\theta) = 3 - 3 \cos \theta, \forall \theta \in]0, \pi[$.

6.2. $h(\theta) = 3 \Leftrightarrow 3 - 3 \cos \theta = 3 \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$, pois $\theta \in]0, \pi[$.

Quando a altura do depósito é 3 metros o ângulo θ é $\frac{\pi}{2}$ radianos, isto é, a superfície do líquido passa pelo centro da esfera e, portanto, o volume do líquido é metade do volume total do depósito.