Escola Secundária de Francisco Franco
www.esffranco.edu.pt
(2020/2021)

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 11.º 5

3.º Período | 14/05/2021 | Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

Classificação: , O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

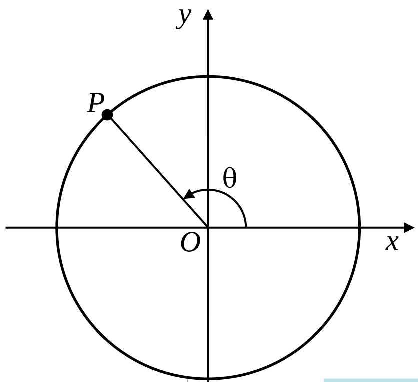
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

1. Considere, na circunferência trigonométrica da figura, o ponto $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

Seja θ a amplitude de um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}P$.

Qual é o valor de $\operatorname{sen}(\theta+\pi)+\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{tg}\theta$?

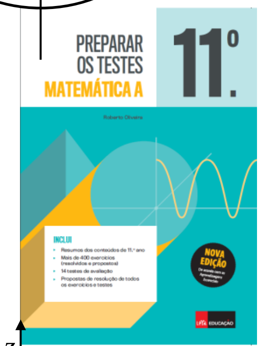


(A) $-\frac{7\sqrt{5}}{6}$

(B) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

(C) $1{,}118$

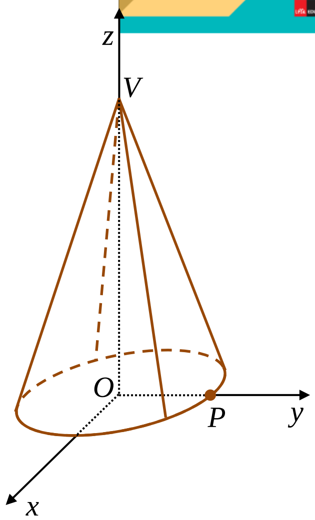
(D) $2{,}609$



2. Considere, na figura junta, o cone representado num referencial o.n. $Oxyz$.

Sabe-se que:

- o volume do cone é igual a 8π ;
- a base do cone está contida no plano xOy e tem centro no ponto O ;
- o ponto P tem coordenadas $(0,2,0)$ e pertence à circunferência que delimita a base do cone;
- o vértice V do cone pertence ao eixo Oz.



2.1. Considere o vetor $\vec{u}(5,3,-1)$.
Qual é o valor de $\overrightarrow{PV}\cdot\vec{u}$?

(A) $(0,-6,-6)$ **(B)** $(-7,-5,0)$ **(C)** -12 **(D)** -6

2.2. Considere o plano α definido por $2y-3z-4=0$.
Mostre que o ponto P pertence a α e escreva uma equação da reta r que contém o ponto P e é perpendicular a α.

3. De uma progressão geométrica de termos positivos (a_n), sabe-se que $a_1 = \frac{1}{10} \wedge a_9 = \frac{27a_6}{125}$.

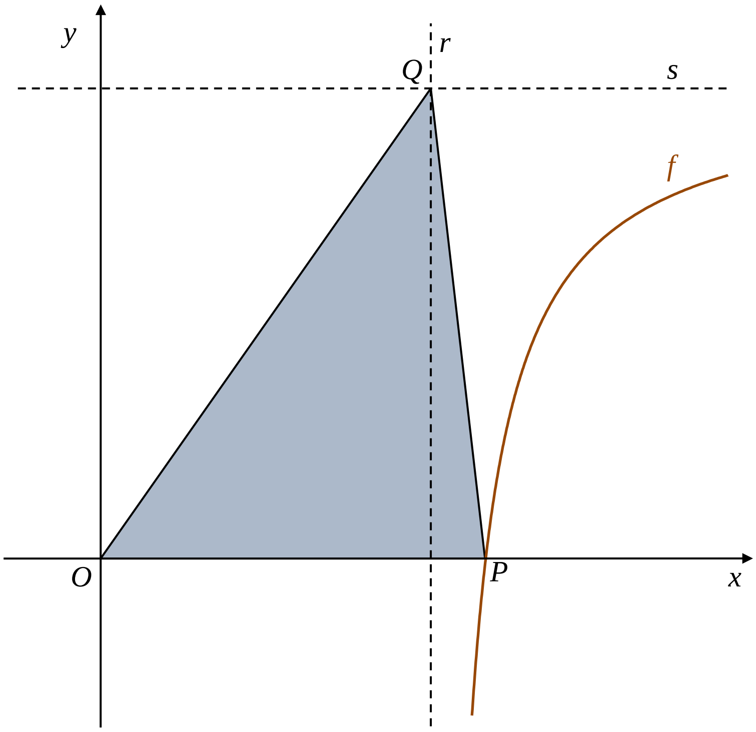
Mostre que a soma dos primeiros n termos de (a_n) é igual a $\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]$.

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, definida por $f(x) = \frac{3x-7}{x-2}$.

4.1. Para um certo número real k, a função g, definida por $g(x) = f(x)+k$, não tem zeros.
Qual é o valor de k ?

(A) -3 **(B)** 3 **(C)** -2 **(D)** 2

4.2. No referencial o.n. xOy da figura estão representados parte do gráfico da função f, as retas r e s, assíntotas do seu gráfico, e o triângulo $[OPQ]$.



Sabe-se que:

- o ponto P pertence ao gráfico de f e ao eixo Ox ;
- o ponto Q é o ponto de interseção das retas r e s.

Determine a área do triângulo $[OPQ]$.

4.3. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, definida por $h(x) = f(x)+x^2+4x$.

O gráfico de h tem dois pontos de abcissa negativa e ordenada nula. Recorrendo à calculadora gráfica, determine a distância entre esses pontos.

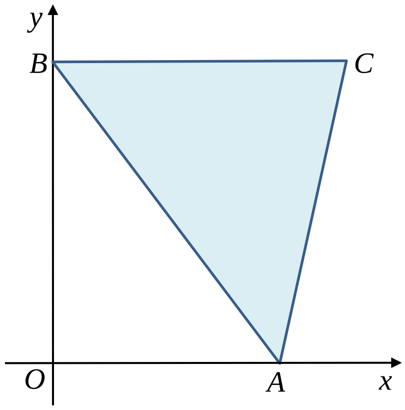
Na sua resposta, deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função h que visualizar na calculadora nesse referencial.
- apresentar os pontos pedidos com as abcissas arredondada às milésimas;
- apresentar a distância pedida, arredondada às centésimas.

5. No referencial o.n. xOy da figura, está representado o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(3,0)$;
- o ponto B tem coordenadas $(0,4)$;
- a reta BC é paralela ao eixo das abcissas.

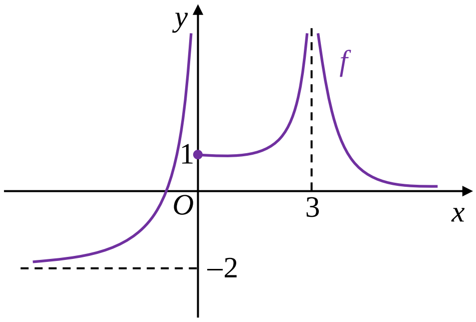


Seja x a abcissa do ponto C, com $x > 3$, e considere $P(x)$ como sendo o perímetro do triângulo $[ABC]$.

5.1. Mostre que $P(x)=x+5+\sqrt{x^2-6x+25}$.

5.2. Determine, na forma de intervalo de números reais, os valores de x para os quais o perímetro do triângulo $[ABC]$ é inferior ou igual a 13 unidades.

6. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.



Tal como a figura sugere:

- $f(0)=1$;
- as retas de equações $x=0$, $x=3$ e $y=-2$ são assíntotas do gráfico de f.

Sejam (a_n) e (b_n) as sucessões cujos termos gerais são $a_n=\frac{8^n}{3^{2n}}$ e $b_n=\sqrt{n}-n$, respetivamente.

Quais são os valores de $\lim f(a_n)$ e $\lim f(b_n)$, respetivamente?

(A) $+\infty$ e -2 **(B)** $+\infty$ e 3 **(C)** 1 e -2 **(D)** 1 e 3

7. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=3-\sqrt[3]{x+5}$.

7.1. Justifique que f admite inversa e caracterize-a.

7.2. Considere agora a função g, também de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\begin{cases}\frac{x^3-27}{3+2x-x^2} & \text{se } x<3\\ f(x)+k & \text{se } x\geq 3\end{cases}$.

Sabendo que $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ existe, determine k.

8. Seja a um número real negativo.

Quanto ao valor de $\lim\limits_{x\to a}\frac{ax-a^2}{(x-a)^3}$:

(A) Não existe; **(B)** É igual a $+\infty$; **(C)** É igual a $-\infty$; **(D)** É igual a 0.

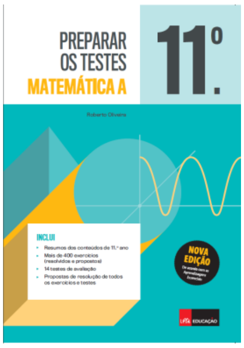
9. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{6x+6} & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{\sqrt{x+8}-3}{2x-2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Calcule, se existirem:

9.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$;

9.2. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

FIM



Formulário

Geometria

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ $(r - \textit{raio})$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

COTAÇÕES

Item Cotação (em pontos)															
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	
8	8	14	19	8	14	14	14	19	8	14	19	8	14	19	**200**