



www.esffranco.edu.pt

(2023/2024)

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 17

2.º Período

08/02/2024

Duração: 90 minutos

Nome: _____

N.º: _____

Classificação:

O professor: _____

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleccione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Foram oferecidos 15 bilhetes para uma sessão de cinema a uma turma com 15 raparigas e 10 rapazes.



Para respeitar a proporção, ficou decidido que o grupo, que vai ao cinema, deve ser formado por 9 raparigas e 6 rapazes.

De quantas maneiras diferentes se pode formar este grupo?

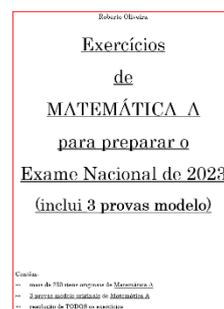
- (A) 5215 (B) 10 430 (C) 1 051 050 (D) 2 102 100

2. Considere todos os números naturais de cinco algarismos, múltiplos de cinco, que se podem formar com os algarismos de 0 a 9.

Escolhe-se um desses números ao acaso.

Determine a probabilidade de esse número ser uma capicua.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.



3. Uma partícula desloca-se sobre uma reta numérica, cuja unidade é o metro.

A abcissa da respetiva posição no instante t , em segundos, é dada por $p(t) = 2t^3 - 13t^2 + 18t$, com $t > 0$.

Sem usar a calculadora, determine a velocidade da partícula, em m/s, no instante em que passa na origem, entre os 3 e os 10 segundos após o início do movimento.

4. A nova caixa de comprimidos ACETILNINA C tem a forma de um prisma quadrangular, com comprimento x , largura y e altura z , que satisfazem as seguintes condições.

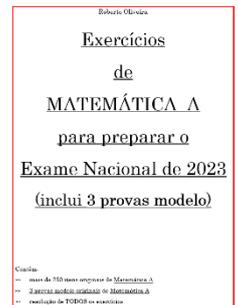
- $x + y = 20$ cm ;
- $x = 4z$ cm.

Seja $V(x)$ o volume, em centímetros cúbicos, da caixa.

4.1. Mostre que $V(x) = 5x^2 - \frac{x^3}{4}$.

4.2. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, determine o comprimento x da caixa de comprimidos ACETILNINA C para o qual o seu volume é máximo.

Apresente o valor em milímetros, arredondado às unidades.



5. Considere a função f , diferenciável em \mathbb{R} , definida por $f(x) = \sqrt{3x^2 + 9}$.

Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 3.

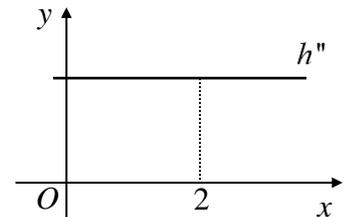
Sem usar a calculadora, escreva a equação reduzida de t .

6. Seja h uma função duas vezes diferenciável em \mathbb{R} .

Na figura, está representada parte do gráfico da função h'' , segunda derivada de h .

Sabendo que $h'(2) = 0$, pode concluir-se que:

- (A) $h(2)$ é um máximo relativo da função h .
- (B) $h(2)$ é um mínimo relativo da função h .
- (C) 2 é a abscissa de um ponto de inflexão do gráfico de h .
- (D) 2 é um zero de h .



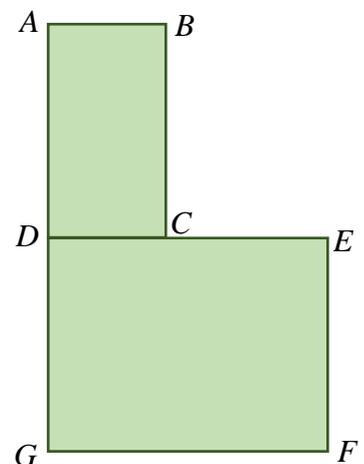
7. Considere os retângulos $[ABCD]$ e $[DEFG]$ da figura.

Sabe-se que, para um certo número real x :

- $\overline{AB} = \sin x$;
- $\overline{AG} = \sqrt{2}$;
- $\overline{DE} = \cos x$;
- D é o ponto médio do segmento $[AG]$.

Qual das expressões a seguir dá a soma das áreas dos dois retângulos?

- (A) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
- (B) $\sin\left(\frac{5\pi}{4} + x\right)$
- (C) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
- (D) $\sin\left(\frac{5\pi}{4} - x\right)$



8. A Helena e o Samuel foram andar de balanço no parque. Cada um deles escolheu um balanço diferente.

A função H dá a distância, em decímetros, do balanço da Helena ao chão t segundos após o início do movimento, e pode ser definida por

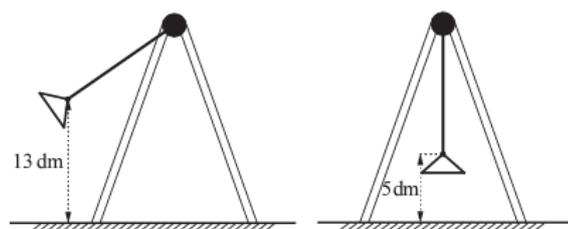
$$H(t) = 9 - 4\sin(0,625\pi t) \text{ com } t \in [0,18]$$

O argumento da função seno está em radianos.

Sabe-se que o Samuel e a Helena começaram a andar de balanço com alguns segundos de diferença.

Admita que a distância, S , em decímetros, do balanço do Samuel ao chão, t segundos depois de a Helena ter começado a andar de balanço, é dada por

$$S(t) = H(t-12) \text{ com } t \in [12,30]$$



- 8.1. De acordo com o modelo apresentado, qual é a distância, em decímetros e arredondado às centésimas, do balanço do Samuel ao chão, 13 segundos depois de a Helena ter começado a andar de balanço?

(A) 12,70 (B) 10,53 (C) 6,22 (D) 5,30

- 8.2. Nos primeiros 5 segundos, a distância do balanço da Helena ao chão foi superior a 12 dm durante algum tempo.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, os valores de t (em segundos) na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais.

Na sua resposta, reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a inequação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas.

Adaptado do Exame Nacional de Matemática B, 2.ª fase de 2015

9. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x+\pi} & \text{se } x < -\pi \\ 2x^2 - \cos(2x) - 2\pi^2 & \text{se } x \geq -\pi \end{cases}$.

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

- 9.1. Estude a continuidade da função f em $x = -\pi$.

- 9.2. A reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -2π interseca o eixo Ox no ponto de abscissa:

(A) -2π (B) -3π (C) $-\frac{5\pi}{2}$ (D) $-\frac{7\pi}{2}$

- 9.3. Mostre que, no intervalo $]\pi, 2\pi[$, $f''(x) = 4 + 4\cos(2x)$, e estude a função f quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

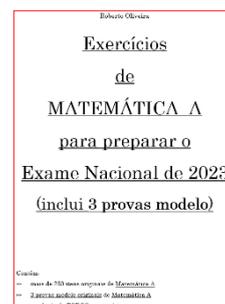
Na sua resposta, deve apresentar:

- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima;
- a(s) abscissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f , se existirem.

10. Sejam f , g e h as funções, de domínio \mathbb{R} , definidas, respetivamente, por

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = \sin x \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{x}{2}$$

Resolva a equação $f(x) + (g \circ h)(x) = 1$.

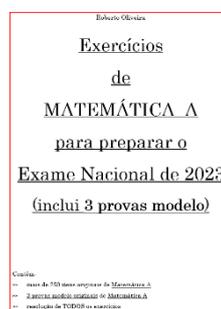


11. Seja k um número real não nulo.

Considere a função h , de domínio \mathbb{R} , definida por
$$h(x) = \begin{cases} \frac{k \cos(3x)}{3\pi - 6x} & \text{se } x \neq \frac{\pi}{2} \\ \frac{4}{5} & \text{se } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de k , sabendo que existe $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} h(x)$.

FIM



COTAÇÕES

Item															
Cotação (em pontos)															
1.	2.	3.	4.1.	4.2.	5.	6.	7.	8.1.	8.2.	9.1.	9.2.	9.3.	10.	11.	200
8	16	16	16	16	16	8	8	8	16	16	8	16	16	16	

Formulário

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + u v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$