PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO
Ficha de preparação para o exame de 12º ano - Matemática A

1. $P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)$

   Sendo A e B dois acontecimentos independentes , tem-se $P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\times P\left(B\right)$.

   Assim, tem-se:

   $P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\right)\times P\left(B\right)=0,3+0,7-0,3\times 0,7=0,79$

   Opção correta: **(B)**

2. Consideremos os seguintes acontecimentos e as respetivas probabilidades:

   A - aluno da escola que se desloca de autocarro

   B - aluno da escola que habita a menos de dez quilómetros da escola

   $P\left(A\right)=\frac{1}{2}$, $P\left(B\right)=\frac{1}{4}$ e $P\left(A\,|\,B\right)=\frac{1}{2}$

   A probabilidade pedida é dada por $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$ e tem-se:

   $$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P\left(A\cup B\right)=1-\left(P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)\right)=$$

   $$=1-P\left(A\right)-P\left(B\right)+P\left(A\,|\,B\right)\times P\left(B\right)$$

   Substituindo os valores dados, obtém-se:

   $$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=1-P\left(A\right)-P\left(B\right)+P\left(A\,|\,B\right)\times P\left(B\right)=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

   Assim, a probabilidade de um aluno dessa escola, escolhido ao acaso, não se deslocar de autocarro para a escola e não habitar a menos de dez quilómetros da escola é $37,5\%$.

3. A soma de todos os elementos da linha de ordem n do triângulo de Pascal é 2^n.

   Como $2^n=1024\Leftrightarrow n=\log_2 1024\Leftrightarrow n=10$, trata-se da linha de ordem 10.

   O quinto elemento da linha seguinte é ${}^{11}C_4=330$.

   Opção correta: **(C)**

4. A soma dos seis primeiros termos de uma progressão geométrica, de primeiro termo u_1 e razão 2, é dada por $u_1 \times \frac{1-2^6}{1-2}$.

Assim, tem-se:

$$u_1 \times \frac{1-2^6}{1-2} = G \Leftrightarrow u_1 \times \frac{1-64}{-1} = G \Leftrightarrow u_1 = \frac{G}{63}.$$

O terceiro termo da progressão é dado por $u_3 = u_1 \times 2^2 = \frac{G}{63} \times 4 = \frac{4G}{63}$.

Opção correta: **(C)**

5.1 Sejam $P(x,y,z)$ um ponto genérico do plano mediador do segmento de reta $[AG]$ e M o ponto médio de $[AG]$. As coordenadas de M são $\left(\frac{3+(-3)}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{0+12}{2}\right)$, ou seja, $(0,3,6)$.

Os vetores $\overrightarrow{AG}$ e $\overrightarrow{MP}$ são perpendiculares, logo $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$.

$\overrightarrow{AG} = G - A$ tem coordenadas $(-6,6,12)$.

$\overrightarrow{MP} = P - M$ tem coordenadas $(x, y-3, z-6)$.

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{MP} = 0 \Leftrightarrow (-6,6,12)\cdot(x, y-3, z-6) = 0 \Leftrightarrow -6x + 6y - 18 + 12z - 72 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - y - 2z + 15 = 0$$

5.2 As coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano FBC ficam determinadas pela conjunção das condições que definem estes conjuntos de pontos.
O plano FBC define-se por $y = 6$.

$$\begin{cases} (x,y,z) = (2,2,2) + k(3,4,6) \\ y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,6,z) = (2,2,2) + k(3,4,6) \\ y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+3k \\ 6 = 2+4k \\ z = 2+6k \\ y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+3k \\ k = 1 \\ z = 2+6k \\ y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ k = 1 \\ z = 8 \\ y = 6 \end{cases}$$

O centro da superfície esférica é $P(5,6,8)$.

O raio da superfície esférica é igual a $\overline{PB}$.

$$\overline{PB}=\sqrt{(3-5)^2+(6-6)^2+(0-8)^2}=\sqrt{68}$$

O volume da esfera com centro no ponto P e cuja superfície contém o ponto B é igual a $\frac{4}{3}\times\pi\times\left(\sqrt{68}\right)^3$, cujo valor arredondado às décimas é $2348,8$.

5.3 O número de casos possíveis para a escolha de dois vértices do prisma é dado por ${}^8C_2$.

Os casos favoráveis a esses vértices serem extremos de uma diagonal de uma face do prisma é igual ao número total de diagonais das faces do prisma, ou seja, 2×6.

A probabilidade pedida é dada por $\frac{2\times 6}{{}^8C_2}$, cujo valor arredondado às milésimas é 0,429.

6. $\lim\left(\frac{n-3}{n}\right)^n=\lim\left(1+\frac{-3}{n}\right)^n=e^{-3}=\frac{1}{e^3}$

Opção correta: **(A)**

7.1 $h\left(\ln(2a)\right)=e^{\ln(2a)}-e^{3\ln(2a)}=2a-e^{\ln\left((2a)^3\right)}=2a-8a^3$

Opção correta: **(D)**

7.2 $h'(x)=\left(e^x-e^{3x}\right)'=e^x-3e^{3x}$

$h'(x)=0\Leftrightarrow e^x-3e^{3x}=0\Leftrightarrow e^x\left(1-3e^{2x}\right)=0\Leftrightarrow e^x=0\vee 1-3e^{2x}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{2x}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow x=\ln\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

x	$-\infty$	$\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$+\infty$
h'	+	0	–
h	↗	Máx.	↘

h é crescente em $\left]-\infty, \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$.

h é decrescente em $\left[\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), +\infty\right[$.

$$h\left(\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = e^{\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} - e^{3\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3} - e^{\ln\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{27} = \frac{3\sqrt{3}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$\frac{2\sqrt{3}}{9}$ é o máximo relativo de h (também absoluto).

7.3 Os comprimentos das bases do trapézio $[ABCD]$ são dados por

$$h(t) = e^t - e^{3t}$$

$$h\left(\frac{t}{3}\right) = e^{\frac{t}{3}} - e^{3\times\frac{t}{3}} = e^{\frac{t}{3}} - e^t$$

A altura do trapézio $[ABCD]$ é dado por

$$\left|t - \frac{t}{3}\right| \underset{-1<t<0}{=} \frac{t}{3} - t = -\frac{2t}{3}$$

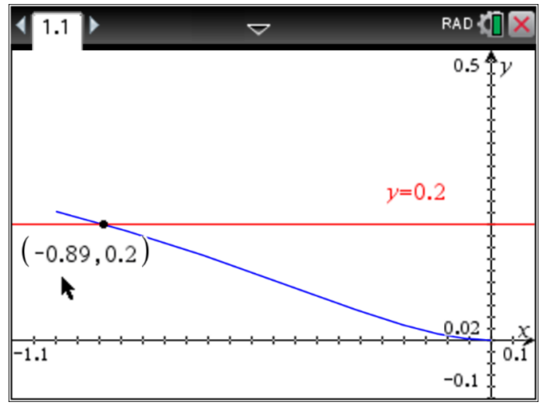
A área de $[ABCD]$ é dada , em função de t, por

$$\frac{e^t - e^{3t} + e^{\frac{t}{3}} - e^t}{2} \times \left(-\frac{2t}{3}\right) = -\frac{t}{3}\left(e^{\frac{t}{3}} - e^{3t}\right) .$$

O problema pode ser resolvido através da determinação da solução da equação $-\frac{t}{3}\left(e^{\frac{t}{3}} - e^{3t}\right) = 0,2$, no intervalo $]-1,0[$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, verifica-se que:

O valor de t para o qual a área do trapézio $[ABCD]$ é igual a $0,2$ é aproximadamente $-0,89$.



8. $z=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)=e^{i\frac{\pi}{7}}$

$z^2=e^{i\frac{2\pi}{7}}$

$\overline{z^2}=e^{i\left(-\frac{2\pi}{7}\right)}$

$\operatorname{Im}\left(\overline{z^2}\right)=\sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)\approx -0,8$

Opção correta: **(A)**

9. Sendo $\lambda\in\mathbb{R}^-$, tem-se $z=\lambda i=|\lambda|(-i)=|\lambda|e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$; logo, o afixo de $z\times w$ é a imagem do afixo de w pela rotação de centro na origem e amplitude $-\frac{\pi}{2}$, composta com a homotetia de centro na origem e razão $|\lambda|$.

Assim, para que o afixo de $z\times w$ pertença ao 1º quadrante, o afixo de w tem de pertencer ao 2º quadrante, ou seja, $\frac{\pi}{2}+2k\pi<\frac{\pi}{5}t<\pi+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.

$\frac{\pi}{2}+2k\pi<\frac{\pi}{5}t<\pi+2k\pi \Leftrightarrow \frac{5}{2}+10k<t<5+10k \quad (k\in\mathbb{Z})$

Como $t\in\left]10,20\right[$, resulta $\frac{25}{2}<t<15$.

Por outro processo:

$z=|\lambda|e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$, $w=2e^{i\left(\frac{\pi}{5}t\right)}$ e $z\times w=2|\lambda|e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}t\right)}$.

Para que o afixo de $z \times w$ pertença ao 1º quadrante, tem-se:

$$2k\pi < -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}t < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow 2k + \frac{1}{2} < \frac{1}{5}t < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2k \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \frac{5}{2} + 10k < t < 5 + 10k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Como $t \in \left]10, 20\right[$, resulta $\frac{25}{2} < t < 15$.

10.1 A função f é contínua em $x = 0$ se tiver limite nesse ponto, ou seja, se:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\cos(2x) - 1}{\sin(2x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 1}{2\sin x \cos x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\sin^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right)}{2\sin x \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{-2\sin^2 x}{2\sin x \cos x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-2x} - 1}{\ln(x+1)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{e^{-2x} - 1}{-2x}}{\frac{\ln(x+1)}{-2x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-2x} - 1}{-2x} \times \lim_{x \to 0^+} \frac{-2x}{\ln(x+1)} = (*)$$

Cálculos auxiliares:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-2x} - 1}{-2x} \underset{y = -2x}{=} \lim_{y \to 0^-} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-2x}{\ln(x+1)} \underset{\substack{y = \ln(x+1) \\ x+1 = e^y \\ x = e^y - 1}}{=} \lim_{y \to 0^+} \frac{-2\left(e^y - 1\right)}{y} = -2 \times \lim_{y \to 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = -2 \times 1 = -2$$

$$(*) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-2x} - 1}{-2x} \times \lim_{x \to 0^+} \frac{-2x}{\ln(x+1)} = 1 \times (-2) = -2$$

Como $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$, a função f não tem limite em $x = 0$ e, portanto, não é contínua nesse ponto.

10.2 O gráfico da função f apenas pode ter uma assíntota não vertical, já que o seu domínio é apenas ilimitado à direita. Verifiquemos se, a existir, se trata de uma assíntota horizontal.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-2x}-1}{\ln(x+1)} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

Conclui-se que o gráfico da função f tem uma assíntota horizontal de equação $y=0$.

10.3 $$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-1}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{0-1}{-1} = 1$$

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = (x-3)^2 \underset{x\in\left]-\infty,\,3\right]}{\Leftrightarrow} -\sqrt{y} = x-3 \Leftrightarrow x = 3-\sqrt{y}$$

$$g^{-1}(x) = 3-\sqrt{x}$$

$$g^{-1}\left(f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = g^{-1}(1) = 3-\sqrt{1} = 2$$

(Em alternativa, pode ser resolvida a equação $g(x)=1$, em $\left]-\infty,\,3\right]$.)

Opção correta: **(C)**

11. Como f tem um extremo relativo em $x=k$ e admite derivada no seu domínio, tem-se $f'(k)=0$.

Como o gráfico da função h tem um ponto de inflexão de abcissa k e é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ (produto de duas funções duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$), tem-se $h''(k)=0$.

Sabe-se ainda que $f''(k)>0$.

Determinemos a segunda derivada de h :

$$h'(x) = \left(f(x)\times g(x)\right)' = f'(x)\times g(x) + f(x)\times g'(x) = f'(x)\times(1-2x) - 2f(x)$$

$$h''(x) = \left(f'(x)\times(1-2x)-2f(x)\right)' = f''(x)\times(1-2x) - 2f'(x) - 2f'(x) =$$

$$= f''(x)\times(1-2x) - 4f'(x)$$

A conjugação destas informações, permite-nos obter o valor de k :

$$h''(k)=0 \Leftrightarrow f''(k)\times(1-2k)-4f'(k)=0 \Leftrightarrow f''(k)\times(1-2k)-4\times 0=0$$

Como $f''(k)>0$, obtém-se:

$$f''(k)\times(1-2k)=0 \Leftrightarrow 1-2k=0 \Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$$

12. $$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{f'(x)-f'(c)}=\lim_{x\to c}\frac{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}}=\frac{\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\lim_{x\to c}\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}}=\frac{f'(c)}{f''(c)}$$

$$f'(x)=(\sin(2x))'=2\cos(2x)$$

$$f''(x)=(2\cos(2x))'=-4\sin(2x)$$

$$\frac{f'(c)}{f''(c)}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{2\cos(2c)}{-4\sin(2c)}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{-2\tan(2c)}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \tan(2c)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como $c\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, tem-se $2c\in]\pi,2\pi[$ e:

$$\tan(2c)=-\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 2c=2\pi-\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2c=\frac{11\pi}{6} \Leftrightarrow c=\frac{11\pi}{12}$$

FIM