Proposta de teste de avaliação

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos **| Data:**

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Determine possíveis valores de n e p para os quais seja verdadeira a igualdade:

$$^{2023}C_{100} + {}^{2023}C_{101} + {}^{2024}C_{1922} = {}^{n}C_{p}$$

2. Um grupo de oito pessoas é constituído por três homens e cinco mulheres.

2.1. Os elementos do grupo vão colocar-se em fila para tirar uma fotografia.

De quantas maneiras o podem fazer de modo que fiquem pelo menos dois homens seguidos (isto é, um ao lado do outro)?

(A) 2400 **(B)** 14 400

(C) 25 920 **(D)** 37 920

2.2. Admita que a este grupo se juntaram mais 13 pessoas.

Neste grupo, com a nova composição, vão ser selecionadas, ao acaso, dois dos seus elementos.
Sabe-se que a probabilidade de selecionar dois homens é 10%.

Determine o número de mulheres que entraram no grupo.

3. A soma dos quatro menores elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é igual a 30.
Escolhem-se ao acaso, dois elementos dessa linha.

Qual é a probabilidade de esses dois elementos serem diferentes?

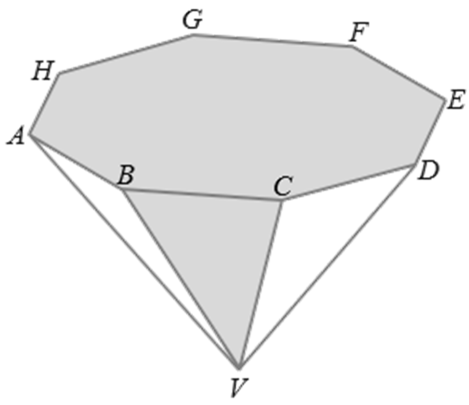
(A) $\frac{1}{15}$ **(B)** $\frac{14}{15}$ **(C)** $\frac{1}{16}$ **(D)** $\frac{15}{16}$

4. Um dos termos do desenvolvimento de $\left(2-\frac{x^2}{4}\right)^{10}$ é um monómio da forma $k\,x^6$.

Qual é o valor de k ?

(A) -120 **(B)** 120 **(C)** -240 **(D)** 240

5. Considere a pirâmide octogonal regular $[VABCDEFGH]$ representada na figura.



5.1. Duas das faces da pirâmide, a base e uma face lateral, estão pintadas de cinzento.

Pretende-se pintar as restantes faces da pirâmide da seguinte forma:

- cada uma das faces é pintada de vermelho ou azul;
- cada face é pintada de uma só cor;
- pelo menos uma face é pintada de vermelho e pelo menos uma face é pintada de azul.

De quantas maneiras diferentes se pode pintar a pirâmide?

5.2. Escolhendo ao acaso três dos nove vértices, qual é a probabilidade de obter um triângulo com vértice no ponto V?

(A) $\frac{3}{7}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{1}{8}$

6. Relativamente aos alunos inscritos numa escola do 1.º ciclo, no presente ano letivo, verificou-se que:

- 35% eram estrangeiros;
- quatro em cada sete alunos estrangeiros eram raparigas;
- a quarta parte dos alunos da escola são rapazes de nacionalidade portuguesa.

Selecionou-se ao acaso uma aluna da escola. Determine a probabilidade de essa aluna ser portuguesa.

7. Seja S um conjunto finito associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset S \text{ e } B \subset S)$.

Sabe-se que:

- $P(A) \neq 0$ e $P(B) \neq 0$
- $P(A|B) = \frac{1}{3}$
- $P(B|A) = \frac{1}{2}$

Mostre que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(A) = P(\overline{A})$.

8. Considere todas as palavras, com ou sem significado, que se podem formar alterando a ordem das dez letras da palavra **SAGACIDADE**.

8.1. As expressões seguintes permitem determinar o número de palavras que é possível formar.

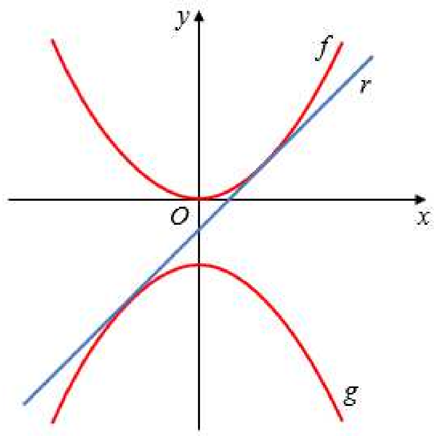
$$\frac{10!}{2!\times 3!} \quad \text{e} \quad {}^{10}C_3 \times {}^{7}C_2 \times 5!$$

Explique, neste contexto, cada uma das expressões.

8.2. Escolhendo, ao acaso, uma dessas palavras, qual é a probabilidade de que as letras iguais apareçam seguidas?

(A) $\frac{1}{60}$ **(B)** $\frac{1}{168}$ **(C)** $\frac{1}{84}$ **(D)** $\frac{1}{90}$

9. Sejam a e b números reais não nulos tais que a reta r de equação $y = 2x - 1$ é tangente aos gráficos das funções f e g definidas por $f(x) = ax^2$ e $g(x) = -ax^2 + b$.



9.1. Mostre que $a = 1$

9.2. Determine o valor de b.

FIM

Cotações:

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.**	**5.1**	**5.2**	**6.**	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	**9.1.**	**9.2.**	
15	10	20	10	10	20	10	20	20	20	10	15	20	**200**

Proposta de resolução

1. $^{2023}C_{100} + {}^{2023}C_{101} + {}^{2024}C_{1922} =$

$= {}^{2024}C_{101} + {}^{2024}C_{1922} =$ $\quad$ $^{2023}C_{100} + {}^{2023}C_{101} = {}^{2024}C_{101}$ dado que $^{n}C_{p} + {}^{n}C_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1}$

$= {}^{2024}C_{101} + {}^{2024}C_{102} =$ $\quad$ $^{n}C_{p} = {}^{n}C_{n-p}$ e $2024 - 1922 = 102$

$= {}^{2025}C_{102}$ $\quad$ $^{n}C_{p} + {}^{n}C_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1}$

Logo, se $^{2023}C_{100} + {}^{2023}C_{101} + {}^{2024}C_{1922} = {}^{n}C_{p}$, pode ser $n = 2025$ e $p = 102$.

2. 3 homens (H) e 5 mulheres (M)

2.1. Há $8!$ maneiras de as oito pessoas se colocarem em fila,

O contrário de ficarem pelo menos dois homens seguidos é os três homens ficarem separados. Vamos determinar de quantas maneiras isto pode acontecer:

As cinco mulheres podem ser ordenadas de 5! maneiras diferentes.

___ M3 ___ M1 ___ M4 ___ M5 ___ M2 ___

Os homens, para que não fiquem dois seguidos, terão de ocupar três dos seis espaços entre as mulheres, no início ou no fim da fila. Há $^{6}A_{3}$ maneiras de escolher esses lugares.

Assim, há $5! \times {}^{6}A_{3}$ maneiras de dispor as pessoas em fila de modo que não fiquem homens seguidos.

Portanto, há $8! - 5! \times {}^{6}A_{3} = 25\,920$ maneiras de organizar a fila de modo que fiquem pelo menos dois homens seguidos.

Resposta: (C)

2.2. Número de elementos do grupo: $8 + 13 = 21$

Número de homens no grupo: n

Relativamente à escolha aleatória de dois elementos do grupo temos:

Número de casos possíveis: $^{21}C_{2} = 210$

Número de casos favoráveis a que sejam escolhidos dois homens: $^{n}C_{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Dado que a probabilidade de selecionar dois homens é $10\% = \dfrac{1}{10}$, temos

$$\frac{^{n}C_{2}}{^{21}C_{2}} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{210} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{n^2 - n}{420} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n = \frac{420}{10} \Leftrightarrow n^2 - n - 42 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{1\pm\sqrt{1+4\times 42}}{2}\Leftrightarrow n=\frac{1\pm\sqrt{169}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{1\pm 13}{2}\Leftrightarrow n=-6\vee n=7$$

Como $n\in\mathbb{N}$, vem $n=7$.

No grupo há sete homens.

A composição inicial do grupo era três homens e cinco mulheres. O número de elementos do grupo passou a ser 21, dos quais sete são homens. Logo, há 14 mulheres, nove das quais entraram de novo.

3. Na linha de ordem n do Triângulo de Pascal o primeiro elemento e o último são iguais a 1. O segundo elemento e o penúltimo são iguais ${}^{n}C_1=n$. Estes quatro são os menores elementos da linha.

Temos, então, $1+n+n+1=30$ pelo que $n=14$.

A linha do Triângulo de Pascal correspondente a $n=14$ tem 15 elementos.

Número de casos possíveis: ${}^{15}C_2=105$

Nesta linha, os primeiros sete elementos são iguais aos sete últimos pelo que é possível formar sete pares de elementos iguais. Logo, o número de casos favoráveis ${}^{15}C_2-7=105-7=98$

A probabilidade pedida é $P=\frac{98}{105}=\frac{14}{15}$ ou $P=1-\frac{7}{105}=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$.

Resposta: (B)

4. $$\left(2-\frac{x^2}{4}\right)^{10}=\sum_{p=0}^{10}{}^{10}C_p\times 2^{10-p}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^p$$

$$T_{p+1}={}^{10}C_p\times 2^{10-p}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^p={}^{10}C_p\times 2^{10-p}\times(-1)^p\,\frac{x^{2p}}{4^p}=$$

$$={}^{10}C_p\times\frac{2^{10-p}}{4^p}\times(-1)^p\,x^{2p}$$

$2p=6\Leftrightarrow p=3$

$$T_{3+1}={}^{10}C_3\times\frac{2^{10-3}}{\left(2^2\right)^3}\times(-1)^3\,x^6=-120\times\frac{2^7}{2^6}x^6=-120\times 2x^6=-240x^6$$

Logo, $k=-240$

Resposta: (C)

5.

5.1. As diferentes maneiras de pintar a pirâmide dependem da escolha da cor a aplicar em cada uma das restantes sete faces.

Para cada face há duas hipóteses de escolha: Vermelho (V) ou Azul (A):

$$\underset{2}{\underline{F_1}}\quad \underset{2}{\underline{F_2}}\quad \underset{2}{\underline{F_3}}\quad \underset{2}{\underline{F_4}}\quad \underset{2}{\underline{F_5}}\quad \underset{2}{\underline{F_6}}\quad \underset{2}{\underline{F_7}}$$

Portanto, há 2^7 opções.

Destas opções há que excluir duas: todas as faces vermelhas e todas as faces azuis (3.ª condição)

Logo, há $2^7 - 2 = 126$ maneiras diferentes de pintar a pirâmide.

Em alternativa, podemos pensar do seguinte modo:

Serão pintadas de vermelho uma, duas, três, quatro, cinco ou seis faces escolhidas entre as sete que faltam pintar (escolhidas as faces a pintar de vermelho, ficam determinadas de forma única as faces a pintar de azul).

O número de maneiras de fazer esta escolha é dada por:

$^7C_1 + {}^7C_2 + {}^7C_3 + {}^7C_4 + {}^7C_5 + {}^7C_6 = 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 = 126$

5.2. Número de casos possíveis : $^9C_3 = 84$

Número de casos favoráveis: $^8C_2 = 28$

Probabilidade pedida: $P = \frac{28}{84} = \frac{1}{3}$

Resposta: (B)

6. Relativamente ao aluno selecionado, sejam os acontecimentos:

A: "o aluno é estrangeiro"

B: "o aluno é uma rapariga"

É dado que

$P(A) = 35\% = 0,35$ (35% são estrangeiros)

$P(B \mid A) = \frac{4}{7}$ (quatro em cada sete alunos estrangeiros são raparigas)

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{4} = 0,25$ (a quarta parte dos alunos são rapazes de nacionalidade portuguesa)

Pretende-se determinar $P(\overline{A} \mid B)$ (a probabilidade de ser português sabendo que é uma rapariga)

$$P\left(\overline{A} \mid B\right)=\frac{P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P(B)}$$

		B	$\overline{B}$	
	A	1.º 0,2		**0,35**
	$\overline{A}$	3.º 0,4	**0,25**	2.º 0,65
		4.º 0,6		1

1.º $P(B \mid A)=\frac{4}{7} \Leftrightarrow \frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{4}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{4}{7}\times P(A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{4}{7}\times 0,35 \Leftrightarrow P(A\cap B)=0,2$

2.º $P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=1-0,35=0,65$

3.º $P\left(\overline{A}\cap B\right)=0,65-0,25=0,40$

4.º $P(B)=0,2+0,4=0,6$

$$P\left(\overline{A} \mid B\right)=\frac{P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P(B)}=\frac{0,4}{0,6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

7. $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)+P(A)=$

$=P\left(\overline{A\cup B}\right)+P(A)=$

$=1-P(A\cup B)+P(A)=$

$=1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]+P(A)=$

$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)+P(A)=$

$=1-P(B)+P(A\cap B)$

Sabemos que:

1. $P(A \mid B)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{3}P(B)$

2. $P(B \mid A)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{2}P(A)$

3. De 1 e 2, $\frac{1}{3}P(B)=\frac{1}{2}P(A) \Leftrightarrow P(B)=\frac{3}{2}P(A)$

Retomando a expressão anterior,

$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)+P(A)=1-P(B)+P(A\cap B)=$

de 3. e 2.

$=1-\frac{3}{2}P(A)+\frac{1}{2}P(A)=$

$=1-P(A)=P\left(\overline{A}\right)$

8. SAGACI**DADE**

8.1. Expressão $\dfrac{10!}{2!\times 3!}$

Os **AAA** podem trocar entre si de $3!$ maneiras diferentes, dando sempre origem à mesma palavra;

Os **DD** podem trocar entre si de $2!$ maneiras diferentes, dando também sempre origem à mesma palavra;

$10!$ é o número de maneiras de ordenar as 10 letras, se fossem todas diferentes.

Nestas $10!$ opções o número de palavras aparece assim multiplicado por $3!\times 2!$.

Logo, o número de palavras diferentes que é possível formar pode ser dado por $\dfrac{10!}{2!\times 3!}$.

Expressão ${}^{10}C_3 \times {}^{7}C_2 \times 5!$

Há 10 posições a preencher para formar uma palavra: $\underset{1.^a}{\underline{\quad}}\ \underset{2.^a}{\underline{\quad}}\ \underset{3.^a}{\underline{\quad}}\ \underset{4.^a}{\underline{\quad}}\ \underset{5.^a}{\underline{\quad}}\ \underset{6.^a}{\underline{\quad}}\ \underset{7.^a}{\underline{\quad}}\ \underset{8.^a}{\underline{\quad}}\ \underset{9.^a}{\underline{\quad}}\ \underset{10.^a}{\underline{\quad}}$

- ${}^{10}C_3$ é o número de maneiras de, nas 10 posições, escolher três para a letra A:

  Por exemplo: $\underset{1.^a}{\underline{\quad}}\ \underset{2.^a}{\underline{A}}\ \underset{3.^a}{\underline{\quad}}\ \underset{4.^a}{\underline{A}}\ \underset{5.^a}{\underline{\quad}}\ \underset{6.^a}{\underline{\quad}}\ \underset{7.^a}{\underline{\quad}}\ \underset{8.^a}{\underline{\quad}}\ \underset{9.^a}{\underline{A}}\ \underset{10.^a}{\underline{\quad}}$

- ${}^{7}C_2$ é o número de maneiras de, nas restantes 7 posições, escolher dois lugares para a letra D:

  Por exemplo: $\underset{1.^a}{\underline{\quad}}\ \underset{2.^a}{\underline{A}}\ \underset{3.^a}{\underline{\quad}}\ \underset{4.^a}{\underline{A}}\ \underset{5.^a}{\underline{\quad}}\ \underset{6.^a}{\underline{D}}\ \underset{7.^a}{\underline{\quad}}\ \underset{8.^a}{\underline{\quad}}\ \underset{9.^a}{\underline{A}}\ \underset{10.^a}{\underline{D}}$

- $5!$ é o número de maneiras de ordenar as restantes 5 letras nas 5 posições que faltam ocupar.

  Por exemplo: $\underset{1.^a}{\underline{S}}\ \underset{2.^a}{\underline{A}}\ \underset{3.^a}{\underline{G}}\ \underset{4.^a}{\underline{A}}\ \underset{5.^a}{\underline{C}}\ \underset{6.^a}{\underline{D}}\ \underset{7.^a}{\underline{I}}\ \underset{8.^a}{\underline{E}}\ \underset{9.^a}{\underline{A}}\ \underset{10.^a}{\underline{D}}$

Portanto, o número de palavras diferentes que é possível formar também pode ser dado por

$${}^{10}C_3 \times {}^{7}C_2 \times 5!$$

8.2. Número de casos possíveis: $\dfrac{10!}{3!\times 2!} = 302\,400$

Número de casos favoráveis: $7! = 5040$

Para que as letras A e as letras D fiquem juntas podem ser consideradas como dois blocos $\boxed{\text{AAA}}$ e $\boxed{\text{DD}}$ que vão permutar juntamente com as restantes cinco letras SGCIE e , portanto, pode acontecer de $7!$ maneiras diferentes

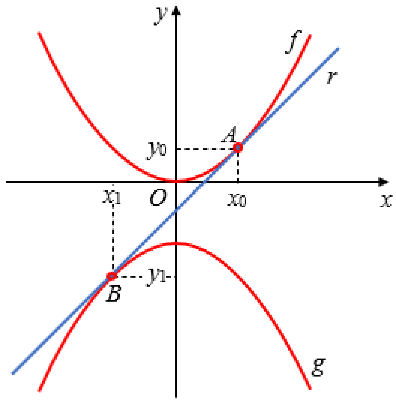
A probabilidade pedida é dada por:

$$P = \frac{5040}{302\,400} = \frac{1}{60}$$

Resposta: (A)

9. $r: \ y = 2x - 1$; $f(x) = ax^2$; $g(x) = -ax^2 + b$.

9.1. $f'(x) = 2ax$



Seja $A(x_0 \, , y_0)$ o ponto de tangência de r no gráfico de f .

$f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow 2ax_0 = 2 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{x_0}$

Como o ponto *A* pertence ao gráfico de f e à reta r vem:

$f(x_0) = 2x_0 - 1 \wedge a = \dfrac{1}{x_0}$

$\Leftrightarrow ax_0^2 = 2x_0 - 1 \wedge a = \dfrac{1}{x_0}$

Então, substituído a por $\dfrac{1}{x_0}$.

$\dfrac{1}{x_0} \times x_0^2 = 2x_0 - 1$

$\Leftrightarrow x_0 = 2x_0 - 1$

$\Leftrightarrow x_0 = 1$

$a = \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{1} = 1$ $x_0 = 1$

9.2. Sendo $a = 1$, $g(x) = -x^2 + b$ e $g'(x) = -2x$

Seja $B(x_1 \, , y_1)$ o ponto de tangência de r no gráfico de g .

$g'(x_1) = 2 \Leftrightarrow -2x_1 = 2 \Leftrightarrow x_1 = -1$

Como o ponto *B* pertence ao gráfico de g e à reta r , vem:

$g(x_1) = 2x_1 - 1 \wedge x_1 = -1$

$-(-1)^2 + b = 2 \times (-1) - 1$

$-1 + b = -2 - 1 \Leftrightarrow b = -2$

FIM