Proposta de teste de avaliação

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:** MARÇO 2023

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Em música, chama-se "acorde" ao som emitido quando três notas são executadas simultaneamente. Com as notas musicais: dó, ré mi, fá, sol, lá, si, quantos acordes diferentes é possível executar?

(A) 21 **(B)** 35 **(C)** 210 **(D)** 840

2. Admita que a magnitude, *M*, de um sismo é dada, na escala de Richter, por:

$$M = \frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0},$$

sendo $E_0 = 7\times10^{-3}$, e E a energia, em kWh, libertada pelo sismo.

O maior terramoto já registado, ocorreu no Chile em 1960, com uma magnitude de 9,5 graus na escala de Richter.

Calcule a energia libertada por este sismo.

3. O valor de $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi - x}$ é:

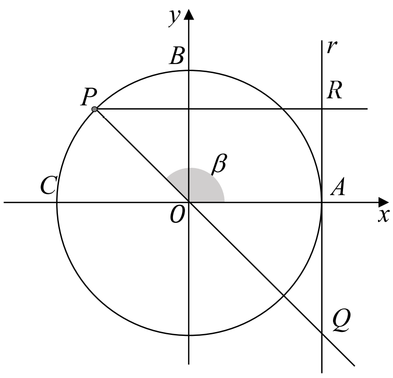
(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $-\infty$

4. Considere a função f, definida em $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, por $f(x)=\dfrac{1-\sin x}{\cos(2x)+1}$.

4.1. Determine as abcissas dos pontos do gráfico de f com ordenada 1.

4.2. Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

5. Na figura estão representados, em referencial ortonormado xOy, a circunferência trigonométrica e o triângulo [PQR].



Sabe-se que:

- Os pontos A, B e C têm coordenadas $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(-1, 0)$, respetivamente;
- A reta r é tangente à circunferência no ponto A;
- O ponto P desloca-se ao longo do arco BC.

Para cada posição do ponto P:

- β é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP $\left(\beta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$;
- a reta PO interseta a reta r no ponto Q;
- R é o ponto da reta r tal que a reta PR é paralela ao eixo Ox.

A área triângulo [PQR], em função de β, é dada por:

(A) $\frac{1}{2}\tan\beta(\cos\beta - 1)^2$

(B) $\frac{1}{2}\tan\beta\sin^2\beta$

(C) $-\frac{1}{2}\tan\beta(\cos\beta - 1)^2$

(D) $-\frac{1}{2}\tan\beta\sin^2\beta$

6. Considere a função f definida em $]2,+\infty[$ por: $f(x)=\log_4(x-2)+\log_2(x-2)$

6.1. Mostre que: $f(x)=\frac{1}{2}\log_2(x-2)^3$

6.2. Resolva a condição $f(x)=6$.

6.3. O gráfico da função g , definida em $\mathbb{R}$ por $g(x)=(x-10)^2-5$, interseta gráfico de f em dois pontos *P* e *Q*.

Utilize as capacidades gráficas da calculadora para determinar as coordenadas desses pontos bem como o comprimento do segmento de reta [*PQ*], com arredondamento às décimas.

Na sua resposta deve:

- apresentar a equação que lhe permite resolver o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- nos cálculos intermédios, utilize pelo menos 3 casas decimais.

7. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por: $g(x)=4e^{-x}+e^{x}$

7.1. Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

7.2. Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa nula.

FIM

Cotações:

Item											
Cotação (em pontos)											
1.	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**6.3.**	**7.1.**	**7.2.**	
15	20	15	20	20	15	15	20	20	20	20	**200**

Proposta de resolução

1. $^{7}C_3 = 35$

Resposta: (B)

2. $M = \frac{2}{3}\log\frac{E}{7\times 10^{-3}}$ e $M = 9,5$

$$9,5 = \frac{2}{3}\log\frac{E}{7\times 10^{-3}} \Leftrightarrow 9,5\times\frac{3}{2} = \log E - \log\left(7\times 10^{-3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log E = 14,25 + \log\left(7\times 10^{-3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log E = 14,25 + \log 7 + \log 10^{-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log E = 14,25 + \log 7 - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log E = 11,25 + \log 7 \Leftrightarrow E = 10^{11,25+\log 7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E = 10^{11,25}\times 10^{\log 7} \Leftrightarrow E = 10^{11,25}\times 7$$

A energia libertada pelo sismo foi $7\times 10^{11,25}$ kWh.

3. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi - x} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin(\pi + y)}{-y} =$

$y = x - \pi \Leftrightarrow x = \pi + y$
Se $x \to \pi$ então $y \to 0$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{-\sin y}{-y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$$

Resposta: **(C)**

4. $f(x) = \frac{1-\sin x}{\cos(2x)+1}$, $D_f = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

4.1. Em D_f, tem-se:

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1-\sin x}{\cos(2x)+1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin x = \cos(2x) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sin x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \vee \sin x = 1 \Leftrightarrow$$

Cálculo auxiliar

$\sin x = y$

$2y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} \vee y = 1$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

Em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, as abcissas são $-\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$.

4.2. Não existem assíntotas não verticais dado que o domínio de f é um conjunto limitado.

Atendendo a que f é contínua em $D_f = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, apenas poderão existir assíntotas verticais em $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$.

$$\lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{1-\sin x}{\cos(2x)+1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \to \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-} \frac{1-\sin x}{\cos(2x)+1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

As retas de equações $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ são assíntotas ao gráfico de f.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos(2x)+1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x + 1} = \qquad \left| 1-\sin^2 x = \cos^2 x \right.$$

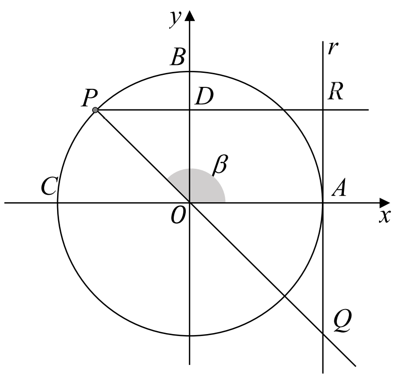
$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x + \cos^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{2\cos^2 x(1+\sin x)} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{2\cos^2 x(1+\sin x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{2\cos^2 x(1+\sin x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{2(1+\sin x)} = \frac{1}{4}$$

A reta de equação $x = \frac{\pi}{2}$ não é assíntota ao gráfico de f.

5. $P(\cos\beta, \sin\beta)$; $\qquad R(1, \sin\beta)$; $\qquad Q(1, \tan\beta)$



$$\overline{PR} = \overline{PD} + \overline{DR} = -\cos\beta + 1 = -(\cos\beta - 1)$$

$$\overline{RQ} = \overline{RA} + \overline{AQ} = \sin\beta - \tan\beta = \sin\beta - \frac{\sin\beta}{\cos\beta} =$$

$$= \sin\beta\left(1 - \frac{1}{\cos\beta}\right) = \sin\beta\left(\frac{\cos\beta - 1}{\cos\beta}\right) =$$

$$= \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \times (\cos\beta - 1) = \tan\beta \times (\cos\beta - 1)$$

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{PR} \times \overline{RQ}}{2} = \frac{-(\cos\beta - 1) \times \tan\beta \times (\cos\beta - 1)}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\tan\beta(\cos\beta - 1)^2$$

Resposta: (C)

6. $f(x) = \log_4(x-2) + \log_2(x-2),\ x \in \left]2, +\infty\right[$

6.1. $f(x) = \log_4(x-2) + \log_2(x-2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{\log_2(x-2)}{\log_2 4} + \log_2(x-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{\log_2(x-2)}{2} + \log_2(x-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}\log_2(x-2) + \log_2(x-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}\log_2(x-2) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2} \times 3\log_2(x-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}\log_2(x-2)^3$$

6.2. $f(x) = 6 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_2(x-2) = 6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-2) = \frac{6 \times 2}{3} \Leftrightarrow \log_2(x-2) = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 2^4 \wedge x > 2 \Leftrightarrow$$

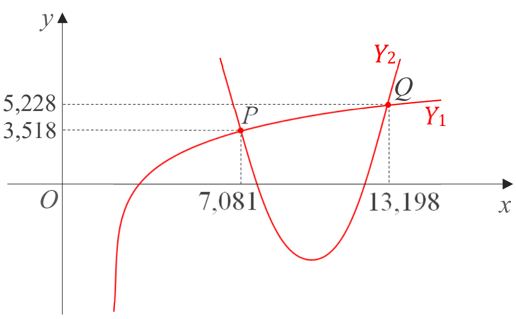
$$\Leftrightarrow x = 16 + 2 \Leftrightarrow x = 18$$

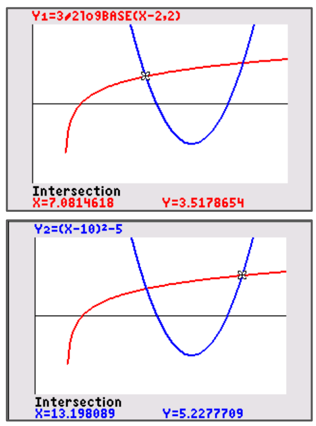
$S = \{18\}$

6.3. Pretende-se determinar as soluções da equação $f(x) = g(x)$.

Recorrendo à calculadora gráfica, com $Y_1 = \frac{3}{2}\log_2(x-2)$ e $Y_2 = (x-10)^2 - 5$, determinaram-se as abcissas dos pontos de interseção dos dois gráficos.

Foi obtido o seguinte resultado:





$$\overline{PQ} \approx \sqrt{(13{,}198 - 7{,}081)^2 + (5{,}228 - 3{,}518)^2} \approx 6{,}4$$

7. $g(x)=4e^{-x}+e^{x}$

7.1. $g'(x)=\left(4e^{-x}+e^{x}\right)'=-4e^{-x}+e^{x}$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow -4e^{-x}+e^{x}=0 \Leftrightarrow e^{x}-\dfrac{4}{e^{x}}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^{2x}-4}{e^{x}}=0 \Leftrightarrow e^{2x}-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{2x}=4 \Leftrightarrow 2x=\ln 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\ln 2^{2}}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{2\ln 2}{2} \Leftrightarrow x=\ln 2$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	4	$\nearrow$
		Mín.	

$g(\ln 2)=4e^{-\ln 2}+e^{\ln 2}=4e^{\ln 2^{-1}}+2=4\times\dfrac{1}{2}+2=4$

A função g é estritamente decrescente em $]-\infty, \ln 2]$, estritamente crescente em $[\ln 2,+\infty[$ e admite um mínimo relativo igual a 4 para $x=\ln 2$.

7.2. $g'(x)=-4e^{-x}+e^{x}$

Declive: $m=g'(0)=-4e^{-0}+e^{0}=-4+1=-3$

$g(0)=4e^{-0}+e^{0}=4+1=5$

Ponto de tangência: $(0,\ 5)$

Equação da reta tangente: $y=-3x+5$