Teste de Matemática A

2021 / 2022

Teste N.º 5

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \, \cos b + \operatorname{sen} b \, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \, \cos b - \operatorname{sen} a \, \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n \, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.u^{n-1}.u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.e^u$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1. Numa turma de 12.º ano, nem todos os alunos estão inscritos no exame de Matemática A.

Relativamente a essa turma, sabe-se que:

- o número de raparigas é metade do número de alunos que estão inscritos no exame de Matemática A;
- um terço dos alunos inscritos no exame de Matemática A são raparigas;
- em cada sete rapazes, três não estão inscritos no exame de Matemática A.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno da turma.

Determine a probabilidade de esse aluno ser um rapaz e estar inscrito no exame de Matemática A. Apresente o resultado na forma de percentagem.

2. Um saco contém nove cartões, indistinguíveis ao tato, numerados de 1 a 9.

2.1. Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, quatro cartões do saco.

Qual é a probabilidade de a soma dos números saídos ser par?

(A) $\frac{61}{126}$ **(B)** $\frac{65}{126}$ **(C)** $\frac{10}{21}$ **(D)** $\frac{11}{21}$

2.2. Colocam-se os nove cartões em cima de uma mesa, lado a lado, em linha reta.

Determine a probabilidade de, ao colocar os cartões, números que não sejam primos não ficarem em posições consecutivas. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3. Seja g a função, de domínio $]-\pi, \pi[$, definida por $g(x) = 4x + 2\cos x + \cos^2 x$.

Resolva os itens seguintes, recorrendo a processos exclusivamente analíticos.

3.1. Considere o gráfico da função g representado num referencial o.n. Oxy.

Considere:

- A o ponto do gráfico de g de abcissa 0;
- r a reta tangente ao gráfico de g em A;
- s a reta perpendicular à reta r em A;
- B e C os pontos de interseção, respetivamente, da reta r e da reta s com o eixo das abcissas.

Determine o valor exato da área do triângulo $[ABC]$.

3.2. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima;
- as abcissas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g.

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x \times \cos x$.

Sem recorrer à calculadora, prove que a equação $f(x) + 4 \times f'(x) = -f''(x)$ é possível no intervalo $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$.

5. Para um determinado número real positivo k, considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-2}}{x^2 + 3x + 2} & \text{se} \quad x < -2 \\ \log k & \text{se} \quad -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 \ln x + e^2 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

5.1. Seja a um número real positivo. Para qualquer valor de a, qual das expressões pode representar a taxa média de variação da função f no intervalo $[a, 2a]$?

(A) $3a \ln(16a)$

(B) $a \ln(16a^3)$

(C) $a \ln(4a^3)$

(D) $\ln(16a^4)$

5.2. Averigue se existe algum valor real k tal que a função f seja contínua em $x = -2$.

Em caso afirmativo, indique esse valor.

5.3. Estude, no intervalo $]0, +\infty[$, a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso exista(m), esse(s) extremo(s).

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

6. Seja k um número real.

Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{kn}$.

Sabe-se que o limite de (u_n) é solução da equação $e^{-\ln\left(\frac{e}{x}\right)} = \frac{1}{e^2}$.

Qual é o valor de k?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

7. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais que são solução da inequação:

$$2x \geq \ln(3e^x - 2)$$

Apresente o resultado sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais.

8. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, tal que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)+\ln x}{2x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x - f(x) - \frac{x^2}{e^x}\right) = -1$

Qual das equações seguintes pode representar a assíntota oblíqua ao gráfico de f?

(A) $y = 2x - 1$

(B) $y = -2x + 1$

(C) $y = 2x + 1$

(D) $y = -2x - 1$

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números:

$$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_2 = \sqrt{2}e^{i\alpha} \quad \text{e} \quad z_3 = 2\sqrt{2}e^{i(\alpha+\pi)},\ \alpha \in \mathbb{R}$$

9.1. Determine, sem recorrer à calculadora, os valores de α que satisfazem a condição:

$$\overline{z_2} = z_2 \times z_1$$

9.2. Considere agora que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

A qual dos quadrantes do plano complexo pertence o afixo do número complexo $z_2 + z_3$?

(A) Primeiro

(B) Segundo

(C) Terceiro

(D) Quarto

FIM

COTAÇÕES

Item														
Cotação (em pontos)														
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**Total**
16	10	16	17	17	17	10	17	17	10	17	10	16	10	**200**