TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

1.

1.1. Opção (A)

Consideremos os acontecimentos:

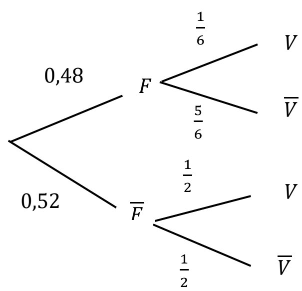
F: “O convidado é familiar da Diana.”

V: “O convidado é vegetariano.”

Sabemos que:

- $P(F) = 0{,}48$
- $P(V|F) = \frac{1}{6}$
- $P(\overline{V}|\overline{F}) = \frac{1}{2}$

Colocando estes dados num diagrama de árvore, obtém-se:



$P(F \cap V) = 0{,}48 \times \frac{1}{6} = 0{,}08$

$P(\overline{F} \cap V) = 0{,}52 \times \frac{1}{2} = 0{,}26$

$P(V) = 0{,}08 + 0{,}26 = 0{,}34$

Pretende-se determinar $P(\overline{F} \cup V) - P(\overline{F} \cap V)$.

$$P(\overline{F} \cup V) - P(\overline{F} \cap V) = P(\overline{F}) + P(V) - P(\overline{F} \cap V) - P(\overline{F} \cap V) =$$

$$= 0{,}52 + 0{,}34 - 0{,}26 - 0{,}26 =$$

$$= 0{,}34$$

1.2. Seja n o número de primos da Diana.

O número de maneiras de a Diana, as duas irmãs e os primos se disporem aleatoriamente, lado a lado, para a fotografia é $(n+3)!$

O número de maneiras de a Diana e as irmãs ficarem juntas é $3!\,(n+1)!$.

Assim:

$$\frac{3! \times (n+1)!}{(n+3)!} = \frac{1}{15} \Leftrightarrow \frac{6 \times (n+1)!}{(n+3)(n+2)(n+1)!} = \frac{1}{15} \Leftrightarrow \frac{6}{(n+3)(n+2)} = \frac{1}{15}$$

$$\Leftrightarrow 6 \times 15 = (n+3)(n+2)$$

$$\Leftrightarrow 90 = n^2 + 5n + 6$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 5n - 84 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times (-84)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-5 \pm \sqrt{361}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-5 \pm 19}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = -12 \vee n = 7$$

Eram 7 os primos da Diana.

1.3. Opção (B)

Sabe-se que a Diana convidou 50 pessoas e que 48% dos convidados são familiares. Assim, existem $0{,}48 \times 50 = 24$ familiares na festa e os restantes 26 convidados são amigos.

Cada familiar enviou uma fotografia, logo existem 24 fotografias enviadas por familiares e, como cada amigo enviou duas fotografias, existem $2 \times 26 = 52$ fotografias enviadas por amigos.

Como a irmã da Diana definiu que iria escolher 40 fotografias, metade enviadas pelos familiares e metade enviadas pelos amigos, terá de escolher 20 fotografias, das 24 enviadas por familiares, e 20 fotografias, das 52 enviadas pelos amigos

Como pretende escolher obrigatoriamente as fotografias enviadas pelos pais, pelas duas irmãs e pelo melhor amigo da Diana, a expressão que dá o número de maneiras de fazer a sua escolha é

${}^{4}C_4 \times {}^{20}C_{16} \times {}^{2}C_2 \times {}^{50}C_{18} = {}^{20}C_{16} \times {}^{50}C_{18}$.

2. Opção (C)

$$\lim u_n = \lim\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)^{2n} = \left(\lim\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)^{n}\right)^2 = \left(e^{\sqrt{2}}\right)^2 = e^{2\sqrt{2}}$$

Assim:

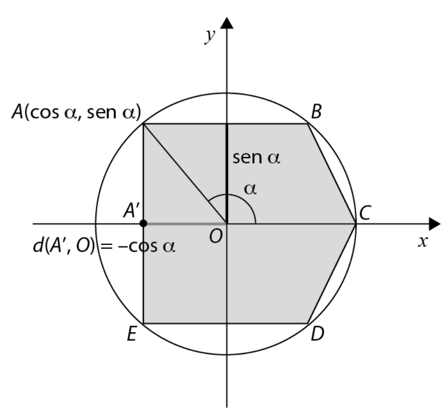
$$\lim f(u_n) = \lim_{x \to e^{2\sqrt{2}}} f(x) = \ln\left(3\, e^{2\sqrt{2}}\right) = \ln(3) + \ln\left(e^{2\sqrt{2}}\right) = \ln(3) + 2\sqrt{2}$$

3. Opção (D)

Sabe-se que as coordenadas do ponto A são $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.

Uma vez que o ponto A pertence ao segundo quadrante, concluímos que $\cos\alpha < 0$ e $\operatorname{sen}\alpha > 0$.

Seja A' a projeção ortogonal de A sobre o eixo Ox.



$$A_{[ABCDE]} = 2 \times A_{[ABCA']} = 2 \times \frac{\overline{A'C} + \overline{AB}}{2} \times \overline{AA'} =$$

$$= 2 \times \frac{1 - \cos\alpha - 2\cos\alpha}{2} \times \operatorname{sen}\alpha =$$

$$= (1 - 3\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha =$$

$$= \operatorname{sen}\alpha - 3\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha =$$

$$= \operatorname{sen}\alpha - \frac{3}{2} \times 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha =$$

$$= \operatorname{sen}\alpha - \frac{3}{2} \operatorname{sen}(2\alpha)$$

4. Em $\mathbb{R}^-$:

$$g'(x) = \left(\frac{x+1}{x^2}\right)' = \frac{(x+1)' \times x^2 - (x+1) \times (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{1 \times x^2 - (x+1) \times 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x^2 - 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{-x^2 - 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{-x-2}{x^3}$$

$$g''(x) = \left(\frac{-x-2}{x^3}\right)' = \frac{(-x-2)' \times x^3 - (-x-2) \times (x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{-1 \times x^3 - (-x-2) \times 3x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{-x^3 + 3x^3 + 6x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{2x^3 + 6x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{x^2(2x+6)}{x^6} =$$

$$= \frac{2x+6}{x^4}$$

$g''(x) = 0$

Em $\mathbb{R}^-$:

$\frac{2x+6}{x^4} = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 6 = 0 \ \wedge \ x^4 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = -3$

x	$-\infty$		-3		0
Sinal de g''		$-$	0	$+$	n.d.
Variação de g'		$\searrow$	$g'(-3)$ mín.	$\nearrow$	n.d.

$g'(-3) = \frac{-(-3)-2}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$ é, então, o declive da reta r, reta tangente ao gráfico de g que apresenta menor declive.

A equação reduzida da reta r é da forma $y = -\frac{1}{27}x + b$.

Como o ponto de coordenadas $(-3, g(-3)) = \left(-3, \frac{-3+1}{(-3)^2}\right) = \left(-3, -\frac{2}{9}\right)$ pertence à reta r, vem que:

$$-\frac{2}{9} = -\frac{1}{27} \times (-3) + b \Leftrightarrow -\frac{2}{9} = \frac{3}{27} + b \Leftrightarrow b = -\frac{2}{9} - \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow b = -\frac{3}{9}$$

$$\Leftrightarrow b = -\frac{1}{3}$$

Logo, a equação reduzida da reta r é $y = -\frac{1}{27}x - \frac{1}{3}$.

Ponto A (ponto de interseção da reta r com o eixo das abcissas):

$0 = -\frac{1}{27}x - \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{27}x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -9$

$A(-9, 0)$

Ponto B (ponto de interseção da reta r com o eixo das ordenadas):

$B\left(0, -\frac{1}{3}\right)$

Área do triângulo $[AOB]$:

$A_{[AOB]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{9 \times \frac{1}{3}}{2} = \frac{3}{2}$

5. $D = \{x \in \mathbb{R} : e^x > 0\} = \mathbb{R}$

Em $\mathbb{R}$:

$$e^x(1 + 8e^{-2x}) \geq 6 \wedge \ln(e^x) > 0 \Leftrightarrow e^x + 8e^{-x} - 6 \geq 0 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow e^x + \frac{8}{e^x} - 6 \geq 0 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 6e^x + 8}{e^x} \geq 0 \wedge x > 0$$

$\Leftrightarrow e^{2x} - 6e^x + 8 \geq 0 \wedge x > 0$, pois $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vamos resolver a condição $e^{2x} - 6e^x + 8 \geq 0$.

Consideremos a mudança de variável $e^x = y$:

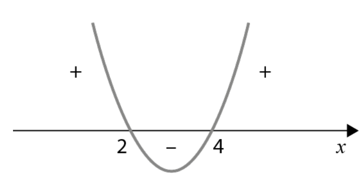
$$e^{2x} - 6e^x + 8 \geq 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{e^x = y} y^2 - 6y + 8 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 2 \vee y \geq 4 \underbrace{\Leftrightarrow}_{y = e^x} e^x \leq 2 \vee e^x \geq 4$$

Cálculo auxiliar

$$y^2 - 6y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 4 \vee y = 2$$



Assim:

$$e^{2x} - 6e^x + 8 \geq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow (e^x \leq 2 \vee e^x \geq 4) \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow (x \leq \ln(2) \vee x \geq \ln(4)) \wedge x > 0$$

C.S. $=]0, \ln(2)] \cup [\ln(4), +\infty[$

6.

6.1. g é contínua em $x=0$ se e só se existir $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, isto é, $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$.

- $$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}^2x - \cos x + 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}^2x + 1 - \cos x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\text{sen}^2x}{x} + \frac{1-\cos x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\text{sen}^2x}{x} + \frac{1-\cos^2x}{x(1+\cos x)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\text{sen}x}{x} \times \text{sen}x\right) + \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\text{sen}^2x}{x(1+\cos x)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{\text{sen}x}{x} \times \lim_{x\to 0^-}\text{sen}x + \lim_{x\to 0^-}\frac{\text{sen}x}{x} \times \lim_{x\to 0^-}\frac{\text{sen}x}{1+\cos x} =$$

$$= 1\times 0 + 1 \times 0 = 0$$

- $$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}(x\ln x) \overset{(0\times\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}\right]}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

  Consideremos a mudança de variável $\frac{1}{x} = y$; $x\to 0^+ \Rightarrow y \to +\infty$.

  $$-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = -\lim_{y\to +\infty}\frac{\ln(y)}{y} = -0 = 0$$

- $g(0) = 0$

Logo, g é contínua em $x=0$.

6.2. Em $[-\pi, 0[$: $f(x) = \text{sen}^2x - \cos x + 1$

$f'(x) = 2\text{sen}x\cos x + \text{sen}x$

$f'(x) = 0$

$$2\text{sen}x\cos x + \text{sen}x = 0 \Leftrightarrow \text{sen}x(2\cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}x = 0 \vee 2\cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

Em $[-\pi, 0[$: $x = -\pi$ e $x = -\frac{2\pi}{3}$

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		0
Sinal de f'	0	$+$	0	$-$	n.d.
Variação de f	$f(-\pi)$ mín.	$\nearrow$	$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ Máx.	$\searrow$	n.d.

Cálculos auxiliares

$f'\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \quad (> 0)$

$f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 = -1 \quad (< 0)$

$f(-\pi) = 0 - (-1) + 1 = 2$

$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{9}{4}$

f é estritamente crescente em $\left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right]$ e é estritamente decrescente em $\left[-\frac{2\pi}{3}, 0\right[$.

2 é mínimo relativo em $-\pi$; $\frac{9}{4}$ é máximo relativo em $-\frac{2\pi}{3}$.

7.

7.1. Assíntotas verticais

Como a função f é contínua em todo o seu domínio, $\mathbb{R}_0^-$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas, o gráfico de f não admite qualquer assíntota vertical.

Assíntotas não verticais

Como a função f tem domínio $\mathbb{R}_0^-$, temos de estudar as assíntotas não verticais ao gráfico de f, apenas para $x \longrightarrow -\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5}-2x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x^2}\right)}-2x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}-2x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}-2x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(-\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}-2\right)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}-2\right) =$$

$$= -\sqrt{4+\frac{5}{+\infty}} - 2 = -\sqrt{4+0} - 2 = -2-2 = -4$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - (-4x)\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+5} - 2x + 4x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+5} + 2x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+5}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+5}-2x\right)}{\sqrt{4x^2+5}-2x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+5}\right)^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+5}-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+5-4x^2}{\sqrt{4x^2+5}-2x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{\sqrt{4x^2+5}-2x} = \frac{5}{\sqrt{+\infty}-(-\infty)} = \frac{5}{+\infty+\infty} = \frac{5}{+\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = -4x$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função f, quando $x \to -\infty$.

7.2. $f(x) = \sqrt{4x^2+5} - 2x$, $x \in \mathbb{R}_0^-$

$$f'(x) = \left(\sqrt{4x^2+5} - 2x\right)' = \left((4x^2+5)^{\frac{1}{2}}\right)' - (2x)' =$$

$$= \frac{1}{2}(4x^2+5)^{-\frac{1}{2}} \times (4x^2+5)' - 2 = \frac{1}{2\sqrt{4x^2+5}} \times 8x - 2 =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{4x^2+5}} \times 8x - 2 = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+5}} - 2,\ x \in \mathbb{R}_0^-$$

Como A é um ponto do gráfico de f', as coordenadas de A são da forma $(x, f'(x))$, ou seja, $\left(x, \frac{4x}{\sqrt{4x^2+5}} - 2\right)$, $x \in \mathbb{R}_0^-$.

Para que a distância de A à origem seja igual a 5:

$$d(O,A) = \sqrt{(x-0)^2 + \left(\frac{4x}{\sqrt{4x^2+5}} - 2 - 0\right)^2} = 5$$

ou seja, $\sqrt{x^2 + \left(\frac{4x}{\sqrt{4x^2+5}} - 2\right)^2} = 5$.

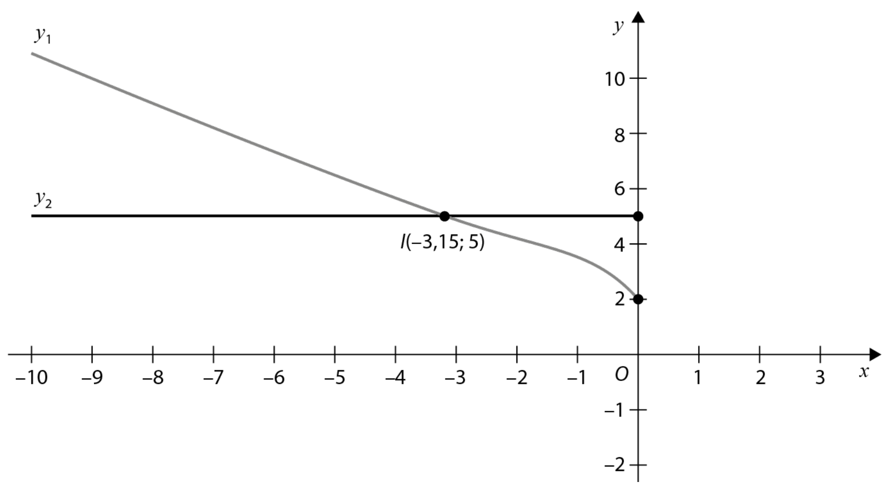
Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:

$y_1 = \sqrt{x^2 + \left(\frac{4x}{\sqrt{4x^2+5}} - 2\right)^2}$

$y_2 = 5$

Seja I o ponto de interseção.

As coordenadas de I são $(-3{,}15;\ 5)$.



Cálculo auxiliar

$$f'(-3{,}15) = \frac{4 \times (-3{,}15)}{\sqrt{4(-3{,}15)^2+5}} - 2$$

$$\approx -3{,}88$$

Logo, as coordenadas do ponto A são $(-3{,}15;\ f'(-3{,}15))$, ou seja, $(-3{,}15; -3{,}88)$.

8. Opção (B)

Seja k um número real.

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = e^{kx}$.

Sabemos que:

$$\lim_{x\to1}\frac{ke^x-ke}{1-x}=3e \Leftrightarrow \lim_{x\to1}\frac{ke\left(e^{x-1}-1\right)}{1-x}=3e \Leftrightarrow \lim_{x\to1}\frac{-ke\left(e^{x-1}-1\right)}{x-1}=3e$$

$$\Leftrightarrow -ke\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=3e$$

Consideremos a mudança de variável $x-1=y$; $x\to1\Rightarrow y\to0$.

$$-ke\lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}=3e \Leftrightarrow -ke\times1=3e \Leftrightarrow k=-3$$

Logo, $g(x)=e^{-3x}$.

g admite derivada finita em $\mathbb{R}$, pois $g'(x)=-3e^{-3x}$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

Assim:

$$\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}\overset{(1)}{=}g'(1)=-3e^{-3}=-\frac{3}{e^3}$$

(1) pois g admite derivada finita em $x=1$.

9. Sabemos que $A\left(a,\frac{e^a}{a}\right)$ e $B\left(2a,\frac{e^{2a}}{2a}\right)$.

Comecemos por determinar o declive da reta AB, em função de a: $\frac{\frac{e^{2a}}{2a}-\frac{e^a}{a}}{2a-a}=\frac{\frac{e^{2a}-2e^a}{2a}}{a}=\frac{e^{2a}-2e^a}{2a^2}$

Determinemos agora $f'(1)$.

$f'(x)=\frac{e^x x-e^x}{x^2}\qquad D_{f'}=\mathbb{R}^+$

$$f'(1)=\frac{e-e}{1}=0$$

Consideremos a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x)=\frac{e^{2x}-2e^x}{2x^2}$.

(1) g é contínua em $\mathbb{R}^+$, por se tratar do quociente entre duas funções contínuas. Em particular, g é contínua em $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e-2\sqrt{e}}{\frac{1}{2}}\approx-1{,}158$ e $\qquad g(1)=\frac{e^2-2e}{2}\approx0{,}976$

Assim, $g\left(\frac{1}{2}\right)<0<g(1)$.

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que: $\exists\, a\in\left]\frac{1}{2},1\right[: g(a)=0$, ou seja, $\exists\, a\in\left]\frac{1}{2},1\right[:\frac{e^{2a}-2e^a}{2a^2}=f'(1)$, isto é, existe, pelo menos, um número real a pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

(note-se que $\left]\frac{1}{2},1\right[\subset\left[\frac{1}{2},1\right]$) tal que a reta AB é paralela à reta tangente ao gráfico de f em $x=1$.