TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

1. Opção (B)

O número de conjuntos possíveis que se pode formar escolhendo, ao acaso, três cozinheiros de um grupo de doze cozinheiros é ${}^{12}C_3$. Destes, apenas num conjunto se encontram em simultâneo os três amigos. Assim, a probabilidade pretendida é $\frac{1}{{}^{12}C_3}$.

2.

2.1. Consideremos os acontecimentos:

F: "O aluno escolhido é do sexo feminino."

I: "O aluno escolhido possui um telemóvel da marca I."

Sabe-se que:

- $P(F) = P(\overline{F}) = 0{,}5$
- $P(I) = 0{,}8$
- $P(\overline{I} \mid \overline{F}) = \frac{3}{10}$

Pretende-se determinar o valor de $P(F \mid I)$.

Como $P(\overline{I} \mid \overline{F}) = \frac{3}{10}$, vem que:

$\frac{P(\overline{I} \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(\overline{I} \cap \overline{F}) = 0{,}3 \times 0{,}5 \Leftrightarrow P(\overline{I} \cap \overline{F}) = 0{,}15$

Organizando os dados numa tabela:

	I	$\overline{I}$	**Total**
F	0,45	0,05	0,5
$\overline{F}$		0,15	0,5
Total	0,8	0,2	1

Cálculos auxiliares

$P(\overline{I} \cap F) = 0{,}2 - 0{,}15 = 0{,}05$

$P(I \cap F) = 0{,}5 - 0{,}05 = 0{,}45$

Assim, $P(F \mid I) = \frac{P(F \cap I)}{P(I)} = \frac{0.45}{0{,}8} = 0{,}5625$.

Logo, a probabilidade pedida é $56{,}25\%$.

2.2. Sendo n o número total de alunos dessa escola, então:

- há $0{,}8n$ alunos dessa escola que possuem um telemóvel da marca I, pois $P(I) = 0{,}8$;
- há $0{,}2n$ alunos dessa escola que possuem um telemóvel de outra marca que não a marca I, pois $P(\overline{I}) = 0{,}2$.

Escolhendo, ao acaso, um grupo de dois alunos de 12.º ano dessa escola, sabe-se que a probabilidade de o grupo escolhido ser constituído por um aluno que possui um telemóvel da marca I e outro que possui um telemóvel de outra marca é igual a $\frac{64}{199}$, logo uma equação que traduz este problema é $\frac{0{,}8n\times 0{,}2n}{^nC_2}=\frac{64}{199}$.

$$\frac{0{,}8n\times 0{,}2n}{^nC_2}=\frac{64}{199}\Leftrightarrow \frac{0{,}16\,n^2}{\frac{n\times(n-1)}{2}}=\frac{64}{199}\Leftrightarrow \frac{0{,}32n^2}{n^2-n}=\frac{64}{199}$$

$$\Leftrightarrow 0{,}32n^2\times\ 199=64\times(n^2-n)\,,\quad n^2-n\neq 0$$

$$\Leftrightarrow 63{,}68n^2=64n^2-64n$$

$$\Leftrightarrow -0{,}32n^2+64n=0$$

$$\Leftrightarrow n(-0{,}32n+64)=0$$

$$\Leftrightarrow n=0\quad\vee\quad -0{,}32n+64=0$$

$$\Leftrightarrow n=0\quad\vee\quad n=\frac{-64}{-0{,}32}$$

$$\Leftrightarrow n=0\ \vee n=200$$

Sendo n o número total de alunos dessa escola, então $n=200$.

3.

3.1. Opção (D)

- $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}x}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}{\frac{e^{2x}-1}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\times 2\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\lim\limits_{y\to 0^-}\frac{e^{y}-1}{y}}=$$ Mudança de variável: $y=2x$

$$=\frac{1}{2\times 1}=$$

$$=\frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}((x+1)^2\ln(x+k^2))=(0+1)^2\ln(0+k^2)=\ln{(k^2)}$$

Para que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ exista, tem que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Assim:

$\ln(k^2)=\frac{1}{2}$, com $k\neq 0$

$$\Leftrightarrow k^2=e^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow k=\pm\sqrt{e^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow k=\pm\sqrt{\sqrt{e}}$$

$$\Leftrightarrow k=\pm\sqrt[4]{e}$$

3.2. Em $]0,+\infty[$ e com $k=1$:

$f(x)=(x+1)^2\ln(x+1)$

$f'(x)=((x+1)^2)'\times\ln(x+1)+(x+1)^2\times(\ln(x+1))'=$

$=2(x+1)(x+1)'\ln(x+1)+(x+1)^2\times\frac{(x+1)'}{x+1}=$

$=2(x+1)\ln(x+1)+(x+1)=$

$=(x+1)\,(2\ln(x+1)+1)$

$f'(x)=0$

$(x+1)\,(2\ln(x+1)+1)=0$

$\Leftrightarrow x+1=0 \quad \vee \quad 2\ln(x+1)+1=0$

$\Leftrightarrow x=-1 \quad \vee \quad \ln(x+1)=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=-1 \quad \vee \quad x+1=e^{-\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \underbrace{x=-1}_{-1\notin]0,+\infty[} \quad \vee \quad \underbrace{x=e^{-\frac{1}{2}}-1}_{e^{-\frac{1}{2}}-1\notin]0,+\infty[}$

	0	$+\infty$
Sinal de f'		+
Variação de f		↗

f é crescente em $]0,+\infty[$ e não apresenta extremos relativos neste intervalo.

3.3. Seja t a reta tangente ao gráfico de f num determinado ponto e seja m_t o seu declive.

Pretende-se provar que:

$$\exists c\in\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right[: m_t=0$$

isto é:

$$\exists c\in\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right[: f'(c)=0$$

Em $\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right[$:

$f'(x)=\left(\frac{\operatorname{sen}x}{e^{2x}-1}\right)'=\frac{(\operatorname{sen}x)'\times(e^{2x}-1)-(\operatorname{sen}x)\times(e^{2x}-1)'}{(e^{2x}-1)^2}=\frac{\cos x\times(e^{2x}-1)-\operatorname{sen}x\times(2e^{2x})}{(e^{2x}-1)^2}$

- f' é contínua em $\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]$, visto, neste intervalo, estar definida pelo quociente de funções contínuas.

- $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\left(e^{2\left(-\frac{\pi}{2}\right)}-1\right)-\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\times 2e^{2\left(-\frac{\pi}{2}\right)}}{\left(e^{2\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)}-1\right)^2} = \frac{0+1\times 2e^{-\pi}}{(e^{-\pi}-1)^2} = \frac{2e^{-\pi}}{(e^{-\pi}-1)^2} > 0$

- $f'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\left(e^{2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}-1\right)-\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\times 2e^{2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}{\left(e^{2\times\left(-\frac{\pi}{3}\right)}-1\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}\times\left(e^{-\frac{2\pi}{3}}-1\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2e^{-\frac{2\pi}{3}}}{\left(e^{-\frac{2\pi}{3}}-1\right)^2} \approx -0{,}29 < 0$

Tem-se que $f'\left(-\frac{\pi}{3}\right) < 0 < f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$$\exists c \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right[: f'(c) = 0$$

o que significa que existe pelo menos um ponto do gráfico de f, de abcissa compreendida entre $-\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{3}$, no qual a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto é paralela ao eixo Ox.

4. Opção (D)

$\lim u_n = \lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{-}$

Como $\lim f(u_n) = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to e^-} f(x) = +\infty$.

Assim, das opções apresentadas, apenas no gráfico da opção (D) se verifica o pretendido.

5. $e^{-x}(2+e^{2x}) < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{e^x}(2+e^{2x}) < 3$

$\Leftrightarrow 2+e^{2x} < 3e^x$, pois $e^x > 0, \forall x \in \mathrm{IR}$

$\Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x + 2 < 0$

Consideremos a mudança de variável $e^x = y$:

$y^2 - 3y + 2 < 0 \Leftrightarrow y > 1 \ \wedge \ y < 2$

Substituindo y por e^x, vem que:

$e^x > 1 \ \wedge \ e^x < 2 \Leftrightarrow x > 0 \ \wedge \ x < \ln(2)$

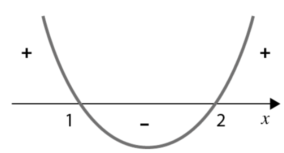
C.S. = $]0, \ln(2)[$

Cálculo auxiliar

$y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\times 2}}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{3\pm 1}{2}$

$\Leftrightarrow y = 2 \ \vee \ y = 1$



6.

6.1. Opção (A)

$N(t_1) = 60 \Leftrightarrow 40\log_2(kt_1+1) = 60 \Leftrightarrow \log_2(kt_1+1) = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow kt_1 + 1 = 2^{\frac{3}{2}}$

$\Leftrightarrow kt_1 = 2^{\frac{3}{2}} - 1$

$\Leftrightarrow k = \frac{2^{\frac{3}{2}}-1}{t_1}$

6.2. $N(t) = 40\log_2(5t+1)$

$N(t_2 + 2) = 1{,}1 \times N(t_2)$

Utilizando x como variável independente:

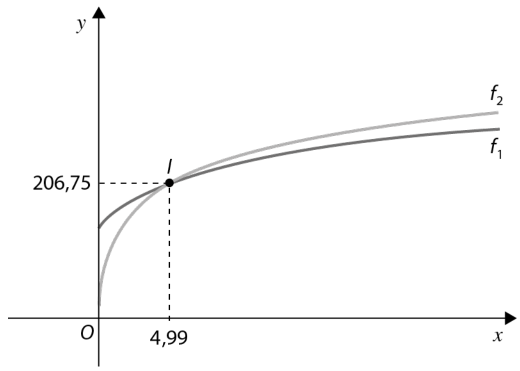
$N(x+2) = 1{,}1 \times N(x),\;\; 0 \leq x \leq 28$

Cálculo auxiliar

$\quad 0 \leq x + 2 \leq 30 \;\;\wedge\;\; 0 \leq x \leq 30$

$\Leftrightarrow\; -2 \leq x \leq 28 \;\;\wedge\;\; 0 \leq x \leq 30$

$\Leftrightarrow\; 0 \leq x \leq 28$



$f_1(x) = 40\log_2(5(x+2)+1)$

$f_2(x) = 1{,}1 \times 40\log_2(5x+1)$

4,99 minutos = 4 minutos + 0,99 minutos

0,99 × 60 ≈ 59 segundos

t_2 corresponde aos 4 minutos e 59 segundos após as 10 h da manhã.

7.

7.1. Em $]1, +\infty[$: $g(x) = 4x - 2\ln(x-1)$

g é contínua em $]1, +\infty[$, logo, a reta de equação $x = 1$ é a única candidata a assíntota vertical ao gráfico de g.

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} (4x - 2\ln(x-1)) = 4 - 2\ln(0^+) = 4 - 2 \times (-\infty) = +\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de g.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x - 2\ln(x-1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(4 - 2\frac{\ln(x-1)}{x}\right) =$$

$$= 4 - 2\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y+1} = 4 - 2\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y\left(1+\frac{1}{y}\right)} =$$

$$= 4 - 2\left(\underbrace{\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{Limite notável}} \times \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{y}}\right) = 4 - 2\left(0 \times \frac{1}{1+0}\right) =$$

$$= 4 - 2 \times 0 = 4$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (g(x) - 4x) = \lim_{x \to +\infty} (4x - 2\ln(x-1) - 4x) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (-2\ln(x-1)) =$$

$$= -2\ln(+\infty) =$$

$$= -\infty$$

Como o valor obtido não é um número real, concluímos que o gráfico de g não admite assíntota não vertical quando $x \to +\infty$.

7.2. Em $]-\infty, 1[$: $g(x) = \frac{1}{4}e^{2x} - e^x$

$$g'(x) = \frac{1}{4} \times 2e^{2x} - e^x = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x$$

$$g''(x) = \frac{1}{2} \times 2e^{2x} - e^x = e^{2x} - e^x$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x(e^x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{Equação impossível}} \quad \vee \quad e^x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0		1
e^x	+	+	+	
$e^x - 1$	–	0	+	
Sinal de g''	–	0	+	
Sentido das concavidades do gráfico de g	∩	P.I.	∪	

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[0, 1[$.

$\left(0, -\frac{3}{4}\right)$ são as coordenadas do ponto de inflexão do gráfico de g.

Cálculo auxiliar

$g(0) = \frac{1}{4}e^0 - e^0 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

8. Opção (B)

Tem-se que:

$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\text{sen}\,\theta$ e $w = 3e^{i(\pi-\theta)} = 3\big(\cos(\pi-\theta) + i\text{sen}(\pi-\theta)\big) = -3\cos\theta + 3i\text{sen}\theta$

Assim:

$\overline{z} + w = \cos\theta - i\text{sen}\theta - 3\cos\theta + 3i\text{sen}\theta =$

$= \underbrace{-2\underbrace{\cos\theta}_{>0}}_{<0} + 2i\underbrace{\text{sen}\theta}_{>0}$, pois $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Assim o afixo de $\overline{z} + w$ pertence ao 2.º quadrante.

Outro processo de resolução:

Tem-se que $z = e^{i\theta}$ e $w = 3e^{i(\pi-\theta)}$. Assim, $\overline{z} = e^{i(-\theta)}$.

$\overline{z} + w = e^{i(-\theta)} + 3e^{i(\pi-\theta)}u = \cos(-\theta) + i\text{sen}(-\theta) + 3\cos(\pi-\theta) + 3i\text{sen}(\pi-\theta) =$

$= \cos(\theta) - i\text{sen}(\theta) - 3\cos(\theta) + 3i\text{sen}(\theta) =$

$= -2\cos(\theta) + 2i\text{sen}(\theta) =$

$= -2(\cos(-\theta) + i\text{sen}(-\theta)) =$

$= -2\text{e}^{i(-\theta)} =$

$= 2\text{e}^{i(\pi-\theta)}$

Como $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, então $-\frac{\pi}{2} < -\theta < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \pi - \theta < \pi$. Logo, $\pi - \theta \in$ 2.º quadrante.

9. $z_1 = -3 - \sqrt{3}i$

$|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\text{tg}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{-3} \ \wedge \ \theta \in 3^{\text{º}}\text{ Q} \Leftrightarrow \text{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \ \wedge \ \theta \in 3^{\text{º}}\text{ Q}$

$\theta = \frac{7\pi}{6}$, por exemplo.

$z_1 = -3 - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$

$z_2 = -\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - i\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] =$

$= -e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$

$(z_1 \times z_2)^n = \left(2\sqrt{3}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)} \times e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\right)^n = \left(2\sqrt{3}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)}\right)^n = \left(2\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{11\pi}{6}n\right)}$

$(z_1 \times z_2)^n$ é um número real positivo se $\frac{11\pi}{6}n = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{12k}{11}, k \in \mathbb{Z}$.

$k = 11 \backsim n = 12$

O menor número natural é 12.