TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

1. Opção (B)

Os números primos de 1 a 11 são: 2, 3, 5, 7 e 11.

Começamos por colocar uma bola amarela em cada uma das cinco caixas com um número primo e fica a sobrar uma bola amarela. Depois, colocamos uma bola branca em cada uma das seis caixas com um número não primo e ficam a sobrar duas bolas brancas.

1.º Processo

Existem 2 casos mutuamente exclusivos de maneira a colocar as 3 bolas restantes:

- as bolas brancas que sobram ficam juntas e a bola amarela fica em qualquer caixa: 11×11 maneiras;
- as bolas brancas que sobram ficam separadas e a bola amarela fica em qualquer caixa: ${}^{11}C_2 \times 11$.

Assim, o número pedido é igual a:

$$11 \times 11 + {}^{11}C_2 \times 11 = 726$$

2.º Processo

Existem 4 casos mutuamente exclusivos de maneira a colocar as 3 bolas restantes:

- as bolas que sobram ficam todas juntas numa mesma caixa: 11 maneiras;
- a bola amarela que sobra fica separada e as bolas brancas que sobram ficam juntas: 11×10 maneiras;
- a bola amarela que sobra fica na mesma caixa com uma e uma só bola branca e a outra bola branca fica separada: 11×10 maneiras;
- as bolas que sobram ficam todas separadas: $11 \times {}^{10}C_2$ maneiras.

Assim, o número pedido é igual a $11 + 11 \times 10 + 11 \times 10 + 11 \times {}^{10}C_2 = 726$.

2. Opção (C)

Se a soma de todos os elementos de uma linha n do triângulo de Pascal é igual a 32 768, então:

$2^n = 32\,768 \Leftrightarrow 2^n = 2^{15} \Leftrightarrow n = 15$

A linha seguinte é a linha de ordem 16 e o maior elemento dessa linha é igual a ${}^{16}C_8 = 12\,870$.

3. Consideremos os acontecimentos:

A: “O aluno estar inscrito em Aplicações Informáticas.”

B: “O aluno estar inscrito em Biologia.”

Sabe-se que:

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{4}{5}$

3.1. Sabe-se ainda que:

$P(A|B) = \frac{1}{13} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{13} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{13} P(B) \Leftrightarrow P(B) = 13P(A \cap B)$

$$P(B|A) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} P(A) \Leftrightarrow P(A) = 4P(A \cap B)$$

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, então:

$\frac{4}{5} = 4P(A \cap B) + 13P(A \cap B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{4}{5} = 16P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{4}{80} = P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{20}$

3.2. $\frac{4}{5} \times 20 = 16$ é número de alunos que está inscrito em Aplicações Informáticas ou em Biologia. A probabilidade pedida é igual a $\frac{{}^{16}C_3 \times {}^{4}C_1 + {}^{16}C_4}{{}^{20}C_4} = \frac{4060}{4845} \approx 0{,}838$.

4.

4.1. Opção (B)

Em $]0, +\infty[$, tem-se que:

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2-2x-12}{x^2-3x}\right)' = \frac{(2x^2-2x-12)' \times (x^2-3x) - (2x^2-2x-12) \times (x^2-3x)'}{(x^2-3x)^2} =$$

$$= \frac{(4x-2) \times (x^2-3x) - (2x^2-2x-12) \times (2x-3)}{(x^2-3x)^2}$$

$$f'(4) = \frac{(16-2) \times (16-12) - (2 \times 16 - 8 - 12) \times (8-3)}{(16-12)^2} = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4}$$

Assim, a equação reduzida da reta pretendida é da forma $y = -\frac{1}{4}x + b$.

O ponto de coordenadas $(4, f(4)) = (4, 3)$ pertence à reta e, assim, tem-se que:

$$3 = -\frac{1}{4} \times 4 + b \Leftrightarrow b = 3 + 1$$

$$\Leftrightarrow b = 4$$

Cálculo auxiliar

$$f(4) = \frac{2 \times 4^2 - 2 \times 4 - 12}{4^2 - 3 \times 4} = \frac{12}{4} = 3$$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 4 é $y = -\frac{1}{4}x + 4$.

4.2. Para f ser contínua em $x = 3$, terá de se verificar $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = f(3) = k$.

- $$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{2x^2-2x-12}{x^2-3x} = \lim_{x \to 3^+} \frac{2(x-3)(x+2)}{x(x-3)} = \lim_{x \to 3^+} \frac{2(x+2)}{x} = \frac{2 \times (3+2)}{3} = \frac{10}{3}$$

Cálculo auxiliar

$$2x^2 - 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 2 \times (-12)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{4} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 2(x-3)(x+2)$$

- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{5-\sqrt{16+x^2}}{3-x} = \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{\left(5-\sqrt{16+x^2}\right)\left(5+\sqrt{16+x^2}\right)}{(3-x)\left(5+\sqrt{16+x^2}\right)} =$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{(5)^2-\left(\sqrt{16+x^2}\right)^2}{(3-x)\left(5+\sqrt{16+x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{25-\left(16+x^2\right)}{(3-x)\left(5+\sqrt{16+x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{25-16-x^2}{(3-x)\left(5+\sqrt{16+x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{9-x^2}{(3-x)\left(5+\sqrt{16+x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{(3-x)(3+x)}{(3-x)\left(5+\sqrt{16+x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{3+x}{5+\sqrt{16+x^2}} =$$

$$= \frac{3+3}{5+\sqrt{16+3^2}} =$$

$$= \frac{6}{5+5} =$$

$$= \frac{6}{10} =$$

$$= \frac{3}{5}$$

Como $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$, verifica-se que a função f não é contínua em $x = 3$, independentemente do valor de k. Conclui-se, assim, que não existe um valor real k para o qual a função f seja contínua em $x = 3$.

4.3. Como a função f tem domínio $\mathbb{R}$, temos de estudar as assíntotas horizontais ao gráfico de f, para $x \longrightarrow -\infty$ e para $x \longrightarrow +\infty$.

- $x \longrightarrow +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-2x-12}{x^2-3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2-\frac{2}{x}-\frac{12}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{2}{x}-\frac{12}{x^2}}{1-\frac{3}{x}} =$$

$$= \frac{2-0-0}{1-0} =$$

$$= 2$$

Assim, a reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico da função f, quando $x \to +\infty$.

- $x \longrightarrow -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{5-\sqrt{16+x^2}}{3-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5-\sqrt{x^2\left(\frac{16}{x^2}+1\right)}}{3-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{5-|x|\sqrt{\frac{16}{x^2}+1}}{3-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{5-(-x)\sqrt{\frac{16}{x^2}+1}}{3-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(\frac{5}{x}+\sqrt{\frac{16}{x^2}+1}\right)}{x\left(\frac{3}{x}-1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{5}{x}+\sqrt{\frac{16}{x^2}+1}}{\frac{3}{x}-1}$$

$$= \frac{0+\sqrt{0+1}}{0-1} =$$

$$= -1$$

Portanto, a reta de equação $y=-1$ é assíntota horizontal ao gráfico da função f, quando $x \to -\infty$.

5. Opção (A)

$$\lim u_n = \lim\left[\frac{a}{n}+\left(\frac{n+a}{n}\right)^n\right] = \lim \frac{a}{n} + \lim\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = 0+e^a = e^a$$

Assim, $\lim f(u_n) = \lim\limits_{x\to e^a} f(x) = \ln e^a = a$.

6. Tem-se que $a \in \mathbb{R}^+$, $A\big(0, f(0)\big)$ e $B(b,0)$.

Como $f(0)=a+\ln(2)$, então $A(0, a+\ln(2))$.

A solução da equação $f(x)=0$, dá-nos o valor de b, abcissa do ponto B.

$f(x)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a+\ln(2-ax)=0 \Leftrightarrow \ln(2-ax)=-a \Leftrightarrow 2-ax=e^{-a}$$

$$\Leftrightarrow -ax = e^{-a}-2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2-e^{-a}}{a}$$

Assim, concluímos que $B\left(\frac{2-e^{-a}}{a}, 0\right)$.

O triângulo $[AOB]$ é isósceles se e só se:

$\overline{OA}=\overline{OB} \Leftrightarrow a+\ln(2)=\frac{2-e^{-a}}{a} \Leftrightarrow a+\ln(2)-\frac{2-e^{-a}}{a}=0$

Consideremos a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x)=x+\ln(2)-\frac{2-e^{-x}}{x}$.

- g é uma função contínua por se tratar da diferença entre duas funções contínuas e, em particular, g é contínua em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

- $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \ln(2) - \frac{2 - e^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \ln(2) - 4 + 2e^{-\frac{1}{2}} \approx -1{,}594$
- $g(1) = 1 + \ln(2) - \frac{2 - e^{-1}}{1} = 1 + \ln(2) - 2 + \frac{1}{e} = -1 + \ln(2) + \frac{1}{e} \approx 0{,}061$

Tem-se que $g\left(\frac{1}{2}\right) < 0 < g(1)$.

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$$\exists c \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[: g(c) = 0, \text{ ou seja, } \exists c \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[: \ c + \ln(2) - \frac{2 - e^{-c}}{c} = 0$$

o que significa que existe, pelo menos, um número real a, pertencente ao intervalo $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, para o qual o triângulo $[AOB]$ é isósceles.

7.

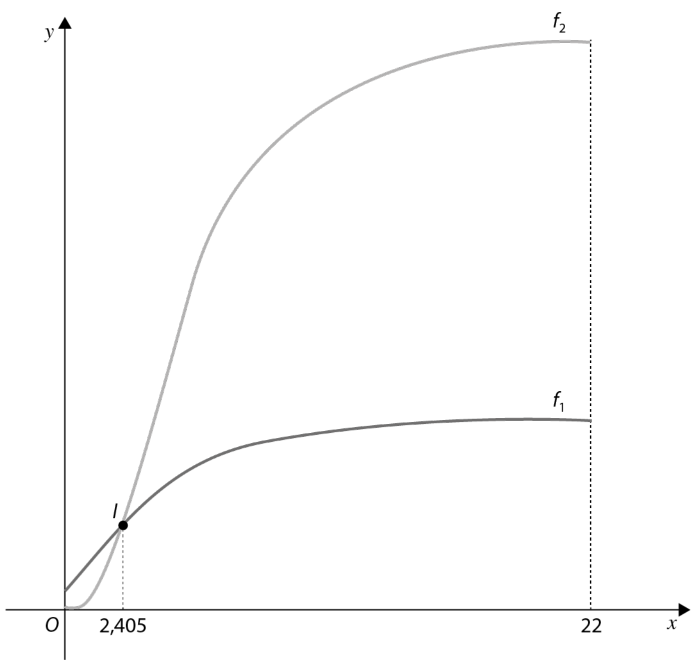
7.1. Opção (A)

Temos que $S(0) = 1$ e $S(1) = \frac{22}{11{,}2}$, logo $\frac{S(1) - S(0)}{S(0)} \times 100 \approx 96\%$.

7.2. A equação que traduz o problema é $S(t+2) = 3\,S(t)$, $t \in [0, 22]$.

Usando x como variável independente:

$f_1(x) = \frac{20(x+2)^3 + (x+2)\sqrt{x+2} + 1}{0{,}2(x+2)^3 + 10\sqrt{x+2} + 1}$ $\qquad$ $f_2(x) = 3 \times \frac{20x^3 + x\sqrt{x} + 1}{0{,}2x^3 + 10\sqrt{x} + 1}$



$t \approx 2{,}405$

$0{,}405 \times 60 \approx 24$

O instante a partir do qual, passadas duas horas, a área da mancha de crude triplicou foi às 2 horas e 24 minutos.

8.

8.1. Em $]-\pi, 0[$, tem-se que:

$$g'(x) = (2023x - 2\cos^2 x + 2)' = 2023 - 2 \times 2 \times \cos x \times (-\text{sen}\, x) =$$
$$= 2023 + 2 \times 2 \times \text{sen}\, x \times \cos x =$$
$$= 2023 + 2\text{sen}(2x)$$

$$g''(x) = \left(2023 + 2\text{sen}\,(2x)\right)' = 2 \times 2\cos(2x) = 4\cos(2x)$$

$g''(x) = 0$

$$4\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos\,(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\,, k \in \mathbb{Z}$$

Em $]-\pi, 0[$, os zeros de g'' são $-\frac{\pi}{4}$ e $-\frac{3\pi}{4}$.

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{4}$		0
Sinal de g''		$+$	0	$-$	0	$+$	
Sentido das concavidades do gráfico de g		$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$	

Cálculos auxiliares

$g''\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 4\cos\left(-\frac{10\pi}{6}\right) = 4\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2 > 0$

$g''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4\cos\left(-\frac{2\pi}{2}\right) = 4\cos(-\pi) = 4 \times (-1) = -4 < 0$

$g''\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(-\frac{2\pi}{6}\right) = 4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2 > 0$

O gráfico da função g tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right]$ e em $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right[$ e a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right]$; tem dois pontos de inflexão de abcissas $-\frac{3\pi}{4}$ e $-\frac{\pi}{4}$.

8.2. Em $]0, +\infty[$: $g'(x) = \left(\frac{5e^{2x}}{2} - 11e^x + x - \ln\,(2)\right)' = \frac{5}{2} \times 2e^{2x} - 11e^x + 1 = 5e^{2x} - 11e^x + 1$

Para que a reta tangente ao gráfico de g seja paralela à bissetriz dos quadrantes pares, o seu declive deverá ser igual a -1.

Assim, a abcissa do ponto A verifica a condição:

$g'(x) = -1 \Leftrightarrow 5e^{2x} - 11e^x + 1 = -1 \Leftrightarrow 5(e^x)^2 - 11e^x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4\times5\times2}}{2\times5}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{11\pm\sqrt{81}}{10}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{11\pm9}{10}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{11+9}{10} \ \vee \ e^x = \frac{11-9}{10}$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2 \ \vee \ e^x = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(2) \ \vee \ x = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$$

Como $\ln(2) > 0$ e $\ln\left(\frac{1}{5}\right) < 0$, tem-se que $\ln\left(\frac{1}{5}\right) \notin]0, +\infty[$ e, portanto, a abcissa do ponto A é igual a $\ln(2)$ e a sua ordenada é igual a $g(\ln(2))$, ou seja, -12.

Cálculo auxiliar

$$g(\ln(2)) = \frac{5e^{2\ln(2)}}{2} - 11e^{\ln(2)} + \ln(2) - \ln(2) = \frac{5e^{\ln(4)}}{2} - 11\times2 = \frac{5\times4}{2} - 22 = -12$$

9. Como A e B são pontos do gráfico de f, então $A(a, ka^2)$ e $B(b, kb^2)$, com $a < b$.

O declive da reta AB é dado por $m_{AB} = \frac{kb^2-ka^2}{b-a} = \frac{k(b^2-a^2)}{b-a} = \frac{k(b-a)(b+a)}{b-a} = k(b+a)$.

Seja C o ponto do gráfico de f em que a reta tangente ao gráfico é paralela à reta AB, ou seja, $C(c, kc^2)$ tal que $f'(c) = m_{AB}$.

$f'(c) = m_{AB} \Leftrightarrow 2kc = k(b+a) \Leftrightarrow 2c = b+a$

$$\Leftrightarrow c + c = b + a$$

$$\Leftrightarrow c - a = b - c$$

Resta-nos provar que $a < c < b$:

Como $2c = b + a$, então $c = \frac{b+a}{2}$.

Verifica-se que:

- $0 < a < b \Rightarrow 0 < a + b < b + b \Leftrightarrow 0 < \frac{a+b}{2} < \frac{2b}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{a+b}{2} < b \Leftrightarrow 0 < c < b$
- $0 < a < b \Rightarrow 0 < a + a < a + b \Leftrightarrow 0 < \frac{2a}{2} < \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 0 < a < c$

Como $a < c < b$ e $c - a = b - c$, provámos que as abcissas dos três pontos são termos consecutivos de uma progressão aritmética.