TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

1.

1.1. Opção (B)

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \cdots\ \_}_{m \text{ professores da zona Norte}} \quad \underbrace{\_\ \_\ \cdots\ \_}_{n \text{ professores da zona Centro}} \quad \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{8 \text{ professores da zona Sul}}$$

$m!$ é o número de maneiras de permutarem entre si m professores da zona norte. Por cada uma destas maneiras, existem $n!$ formas de os professores da zona centro permutarem também entre si. Por cada uma das maneiras de se posicionarem os professores das zonas norte e centro, existem 10! formas de os oito professores da zona sul permutarem entre si e também entre os blocos de professores das outras duas zonas.

Assim, $m! \times n! \times 10!$ é uma resposta ao problema.

1.2. Número de casos possíveis: ${}^{19}C_4$

Número de casos favoráveis: $\underbrace{{}^{17}C_4}_{\substack{\text{número de comissões sem} \\ \text{a Maria e sem o João}}} + \underbrace{{}^{2}C_1 \times {}^{17}C_3}_{\substack{\text{número de comissões só com} \\ \text{a Maria e só com o João}}}$

A probabilidade pedida é, então, $\frac{{}^{17}C_4 + {}^{2}C_1 \times {}^{17}C_3}{{}^{19}C_4} = \frac{3740}{3876} = \frac{55}{57}$.

1.3. $P(A|\overline{B})$ significa a probabilidade de os dois professores escolhidos serem da zona norte, sabendo que os dois professores escolhidos são da mesma zona do país.

Como há cinco professores da zona norte, seis da zona centro e oito da zona sul, o número de modos de escolher aleatoriamente dois professores da mesma zona do país é dado por ${}^{5}C_2 + {}^{6}C_2 + {}^{8}C_2$, ou seja, 53 maneiras, o que constitui o número de casos possíveis.

Destes, ${}^{5}C_2$ dizem respeito ao número de maneiras de escolher dois professores dos cinco que são da zona norte.

Assim, ${}^{5}C_2$, isto é, 10, é o número de favoráveis.

Segundo a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis, quando estes são em número finito e equiprováveis.

Assim, $P(A|\overline{B}) = \frac{10}{53}$.

2. Sabe-se que a soma dos coeficientes binomiais do desenvolvimento de $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^n$ é dada por 2^n.

Como $2^n = 1024$, então $n = 10$.

Assim, o desenvolvimento de $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^n$ tem 11 termos da forma:

$$^{10}C_k \times \left(\sqrt{x}\right)^{10-k} \times \left(-\frac{2}{x}\right)^k, k \in \{0, 1, \dots, 10\}$$

Consoante k é par ou ímpar, estes termos terão coeficientes, respetivamente, positivos ou negativos, havendo seis termos positivos e cinco negativos.

Número de casos possíveis: $^{11}C_2 = 55$

Número de casos favoráveis: $\underbrace{^6C_2}_{\substack{\text{número de casos em que ambos} \\ \text{os coeficientes são positivos}}} + \underbrace{^5C_2}_{\substack{\text{número de casos em que ambos} \\ \text{os coeficientes são negativos}}} = 15 + 10 = 25$

A probabilidade pretendida é $\frac{^6C_2 + {}^5C_2}{^{11}C_2} = \frac{25}{55}$, que é aproximadamente igual a 45%.

3. Opção (D)

Sabemos que $P(A|B) = \frac{1}{6}$, logo:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}P(B)$$

Sabemos também que $P(B \setminus A) = \frac{1}{4}$, logo $P(B) - P(B \cap A) = \frac{1}{4}$.

Como $P(A \cap B) = \frac{1}{6}P(B)$, vem que:

$$P(B) - \frac{1}{6}P(B) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{5}{6}P(B) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(B) = \frac{6}{20}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{3}{10}$$

Logo:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) =$$

$$= 1 - \frac{1}{20} =$$

$$= \frac{19}{20} =$$

$$= 0{,}95$$

4. Consideremos os acontecimentos:

B: "O aluno escolhido vê a série *Peaky Blinders*."

M: "O aluno escolhido vê a série *How I met your mother*."

Sabemos que:

- $P(B) = \frac{7}{10}$
- $P(M) = \frac{1}{2}$
- $P(\overline{B}|M) = \frac{1}{5}$, isto é:

$$\frac{P(\overline{B} \cap M)}{P(M)} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow P(\overline{B} \cap M) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(\overline{B} \cap M) = \frac{1}{10}$$

Organizando toda a informação numa tabela:

	M	$\overline{M}$	Total
B			$\frac{7}{10}$
$\overline{B}$	$\frac{1}{10}$		$\frac{3}{10}$
Total	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Pretendemos determinar $P(B \cap \overline{M})$:

$$P(B \cap M) = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$P(B \cap \overline{M}) = \frac{7}{10} - \frac{2}{5} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

	M	$\overline{M}$	Total
B	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$
$\overline{B}$	$\frac{1}{10}$		$\frac{3}{10}$
Total	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Logo, a probabilidade pedida é igual a 0,3.

5. Opção (D)

Sabemos que:

- ${}^{n-1}C_{p-1} = 8008$
- ${}^{n-1}C_{p+1} = 12\,870$
- ${}^{n}C_{p} = 19\,448$

Assim, a sua disposição no triângulo de Pascal seria:

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & 8008 & & {}^{n-1}C_p & & 12\,870 & \ldots \\ & \ldots & 19\,448 & & {}^{n}C_{p+1} & \ldots & \\ & & \ldots & {}^{n+1}C_{p+1} & \ldots & & \end{array}$$

${}^{n-1}C_p = 19\,448 - 8008 = 11\,440$

${}^{n}C_{p+1} = 11\,440 + 12\,870 = 24\,310$

${}^{n+1}C_{p+1} = 19\,448 + 24\,310 = 43\,758$

Como ${}^{n+1}C_{p+1} = {}^{n+1}C_{(n+1)-(p+1)} = {}^{n+1}C_{n-p}$, então ${}^{n+1}C_{n-p} = 43\,758$.

6. $P(\bar{A}) + P(A \backslash B) = P(\bar{A}) + P(A \cap \bar{B}) = 1 - P(A) + P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cup \bar{B}) =$

$= P(\bar{B}) + 1 - P(A \cup \bar{B}) =$

$= P(\bar{B}) + P\left(\overline{A \cup \bar{B}}\right) =$

$= P(\bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) =$

$= P(\bar{B}) + P(B) \times P(\bar{A}|B) =$

$= P(B) \times P(\bar{A}|B) + P(\bar{B})$ c.q.d.

7.

7.1. Opção (C)

O número de casos possíveis é ${}^{14}C_2 = 91$.

O número de casos favoráveis é igual a $({}^{7}C_2 - 7) \times 2 + 7 \times 2 = 28 + 14 = 42$.

${}^{7}C_2 - 7$ é o número de diagonais de cada uma das bases do prisma. Como o prisma tem duas bases, então $({}^{7}C_2 - 7) \times 2$ é o número de diagonais das bases.

Como as faces laterais são retângulos, cada face tem duas diagonais, logo as sete faces laterais têm um total de $7 \times 2 = 14$ diagonais.

A probabilidade pedida é igual a $\frac{42}{91} = \frac{6}{13}$.

7.2.

7.2.1. Os conjuntos de dois números que adicionados dão 11 são: {2, 9}, {3, 8}, {4, 7} e {5, 6}

Temos quatro possibilidades distintas para escolher o conjunto de números que serão colocados nas bases do prisma. Por cada uma destas maneiras, existem duas permutações desses dois números e, por cada uma destas maneiras, existem 6! maneiras diferentes de colocar os seis números restantes nas seis faces laterais restantes.

Assim, o número de maneiras pedidas é igual a $4 \times 2 \times 6! = 5760$.

7.2.2. Como dispomos apenas de quatro algarismos ímpares e de quatro algarismos pares, existem apenas dois casos mutuamente exclusivos:

$\underline{1}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{P}\ \underline{P}$

$$1 \times 4! \times {}^4A_2 \times \underbrace{{}^6C_4}_{\substack{\text{número de}\\ \text{maneiras de escolher}\\ \text{4 posições para os}\\ \text{algarismos ímpares}}} \times \underbrace{2!}_{\substack{\text{número de maneiras}\\ \text{de permutar os}\\ \text{restantes 2 algarismos}\\ \text{para as bases}}}$$

$\underline{1}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{P}\ \underline{P}\ \underline{P}\ \underline{P}$

$$1 \times {}^4A_2 \times 4! \times \underbrace{{}^6C_4}_{\substack{\text{número de}\\ \text{maneiras de escolher}\\ \text{4 posições para os}\\ \text{algarismos pares}}} \times \underbrace{2!}_{\substack{\text{número de maneiras}\\ \text{de permutar os}\\ \text{restantes 2 algarismos}\\ \text{para as bases}}}$$

Logo, $4! \times {}^4A_2 \times {}^6C_4 \times 2! + 4! \times {}^4A_2 \times {}^6C_4 \times 2! = 17\,280$ é o número de maneiras pedidas.

7.3. Opção (C)

Número de casos possíveis: __ __ __ __ __ __ __ __ __

$$n \times n \times n \times n \times n \times n \times n \times n \times n = n^9 = {}^nA'_9$$

Número de casos favoráveis: ${}^9C_3 \times n \times {}^{n-1}A_6$

- ${}^9C_3$ é o número de maneiras de escolher qual o conjunto de três faces de entre as nove que serão pintadas da mesma cor;
- n é o número de maneiras de escolher qual a cor de entre as n a utilizar nas faces pintadas da mesma cor;
- ${}^{n-1}A_6$ é o número de maneiras de pintar ordenadamente as restantes seis faces com as $n-1$ cores ainda disponíveis.

Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{{}^9C_3 \times n \times {}^{n-1}A_6}{{}^nA'_9}$.