TESTE N.º 1 – Proposta de resolução

1. Opção (D)

___ ___ ___ ___ ___ 2 ou ___ ___ ___ ___ ___ 4,6 ou 8

$^3C_1 \times\ ^5C_4 \times 5!$ + $^4C_2 \times\ ^4C_3 \times 5! \times 3$

= 1800 + 8640 =

= 10 440

2. Opção (D)

$$1 + n +\ ^nC_2 = 2\,045\,254 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = 2\,045\,254$$

$$\Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 2\,045\,254$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2n + n^2 - n = 4\,090\,508$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 4\,090\,506 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-4\,090\,506)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow n = 2022 \quad \vee \quad n = -2023$$

Como $n \in \mathbb{N}$, $n = 2022$.

A soma de todos os elementos da linha $n = 2022$ é 2^{2022} e a soma de todos os elementos da linha seguinte ($n = 2023$) é 2^{2023}.

Assim, a soma de todos os elementos destas duas linhas é:

$2^{2022} + 2^{2023} = 2^{2022} + 2 \times 2^{2022} = 2^{2022}(1 + 2) = 3 \times 2^{2022}$

3.

3.1. $^3C_2 \times 2 \times\ ^5C_2 \times\ ^7C_2 \times 4! \times 10!$

3.2. Número de casos possíveis: 16!

Número de casos favoráveis: 16! – 2! × 15!

$\underbrace{\_D\_\ \ \_P\_}_{2!}$ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

$\times 15!$

2! × 15! é o número de maneiras de o casal ficar junto na fotografia.

A probabilidade pretendida é, então, igual a:

$$\frac{16! - 2! \times 15!}{16!} = \frac{7}{8}$$

4. ${}^{2023}C_1 \times {}^{n}C_5 = \frac{2023!\times 7}{2022!\times 15} \times {}^{n-2}A_3 \Leftrightarrow 2023 \times \frac{n!}{5!(n-5)!} = \frac{2023\times 2022!\times 7}{2022!\times 15} \times \frac{(n-2)!}{(n-2-3)!}$

$\Leftrightarrow \frac{2023n!}{120(n-5)!} = \frac{2023\times 7\times (n-2)!}{15\times (n-5)!}$

$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{120\times 7}{15}$

$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{(n-2)!} = 56$

$\Leftrightarrow n^2 - n - 56 = 0$

$\Leftrightarrow n = \frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 1\times(-56)}}{2\times 1}$

$\Leftrightarrow n = \frac{1\pm\sqrt{225}}{2}$

$\Leftrightarrow n = \frac{1+15}{2} \quad \vee \quad n = \frac{1-15}{2}$

$\Leftrightarrow n = 8 \quad \vee \quad n = -7 \notin \mathrm{IN}$

C.S. $= \{8\}$

5. Opção (C)

Sabemos que:

- $P(B) = 0{,}35$
- $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}15$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}35$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}35 \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0{,}35 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0{,}35 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}65$

$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}15 \Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) = 0{,}15 \Leftrightarrow 0{,}35 - 0{,}15 = P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}2$

Pretendemos determinar:

$P\left(\overline{B} \middle| (A \cup B)\right) = \frac{P(\overline{B} \cap (A\cup B))}{P(A\cup B)} = \frac{P\left((\overline{B} \cap A) \cup \overbrace{(\overline{B} \cap B)}^{\emptyset}\right)}{P(A\cup B)} =$

$= \frac{P((\overline{B} \cap A))}{P(A\cup B)} =$

$= \frac{P(A) - P(A\cap B)}{P(A\cup B)} =$

$= \frac{0{,}5-0{,}2}{0{,}65} =$

$= \frac{0{,}3}{0{,}65} =$

$= \frac{30}{65} =$

$= \frac{6}{13}$

Cálculo auxiliar

$0{,}65 = P(A) + 0{,}35 - 0{,}2 \Leftrightarrow 0{,}65 = P(A) + 0{,}15$

$\Leftrightarrow P(A) = 0{,}5$

6.

6.1 Consideremos os seguintes acontecimentos:

F: “Ser do sexo feminino.”

C: “Praticar desporto de competição.”

Sabe-se que:

- $P(F) = 0{,}4$
- $P(C|F) = \frac{1}{4}$
- $P(F|C) = \frac{1}{3}$

$$P(C|F) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{P(C \cap F)}{0{,}4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(C \cap F) = 0{,}1$$

$$P(F|C) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0{,}1 = \frac{1}{3}P(C)$$

$$\Leftrightarrow P(C) = 0{,}3$$

Organizando os dados numa tabela:

	F	$\overline{F}$	**Total**
C	0,1		0,3
$\overline{C}$			
Total	0,4		1

$P(\overline{C} \cap F) = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$

$P(\overline{C}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

$P(\overline{C} \cap \overline{F}) = 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}4;\ \ 40\%$

A probabilidade pedida é igual a 40%.

6.2 $0{,}4n \rightarrow$ número de raparigas da turma

$0{,}6n \rightarrow$ número de rapazes da turma

$$\frac{0{,}4n \times (0{,}6n - 1)}{{}^{n}C_2} = \frac{88}{190} \Leftrightarrow \frac{190 \times 0{,}4n \times (0{,}6n - 1)}{\frac{n(n-1)}{2}} = 88$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \times 190 \times 0{,}4n \times (0{,}6n - 1)}{n(n-1)} = 88$$

$$\Leftrightarrow 152(0{,}6n - 1) = 88n - 88$$

$$\Leftrightarrow 91{,}2n - 88n = -88 + 152$$

$$\Leftrightarrow 3{,}2n = 64$$

$$\Leftrightarrow n = 20$$

7. Opção (C)

$$\underbrace{\_\_\ \ \_\_\ \ \_\_\ \ \cdots\ \ \_\_}_{\substack{\frac{n}{2}\text{ telemóveis}\\ \text{das raparigas}}} \qquad \underbrace{\_\_\ \ \_\_\ \ \_\_\ \ \cdots\ \ \_\_}_{\substack{\frac{n}{2}\text{ telemóveis}\\ \text{dos rapazes}}}$$

$$\underbrace{\underbrace{\_\_\ \ \_\_\ \ \_\_\ \ \cdots\ \ \_\_}_{\substack{\left(\frac{n}{2}\right)!\text{ é o número de maneiras}\\ \text{de os telemóveis das raparigas estarem}\\ \text{juntos e permutarem entre si}}} \qquad \_\_\ \ \_\_\ \ \_\_\ \ \cdots\ \ \_\_}_{\substack{\left(\frac{n}{2}+1\right)!\text{ é o número de maneiras}\\ \text{de os telemóveis dos rapazes permutarem}\\ \text{entre si e entre o bloco dos telemóveis}\\ \text{das raparigas que estão juntos}}}$$

8. Opção (D)

$$\begin{aligned} {}^{n+2}C_{p+2} + {}^{n+2}C_{n-p} &= {}^{n+2}C_{p+2} + \underbrace{{}^{n+2}C_{n-p}}_{{}^{n+2}C_{(n+2)-(n-p)}} = \\ &= {}^{n+2}C_{p+2} + {}^{n+2}C_{p+2} = \\ &= 2 \times \underbrace{{}^{n+2}C_{p+2}}_{{}^{n+1}C_{p+1}+{}^{n+1}C_{p+2}} = \\ &= 2(x+y) = \\ &= 2x + 2y \end{aligned}$$

9. ${}^{30}C_5$ é o número de maneiras de escolher cinco alunos, de entre os 30 alunos da turma sem qualquer restrição.

Se ao número de possibilidades de escolher quaisquer cinco alunos retirarmos o número de possibilidades de não ter nenhum aluno com uma calculadora da marca T e exatamente um aluno com uma calculadora da marca T, obtemos o número de possibilidades de ter pelo menos dois alunos com uma calculadora da marca T.

Assim, ${}^{15}C_5$ é o número de maneiras de escolher cinco alunos que possuem calculadoras da marca C (10 alunos) ou N (5 alunos), e que, portanto, não possuem calculadora da marca T.

$15 \times {}^{15}C_4$ é o número de maneiras de escolher exatamente um aluno com uma calculadora da marca T, pois pode ser escolhido qualquer um dos 15 alunos que possuem uma calculadora da marca T, e, por cada uma destas maneiras, existem ${}^{15}C_4$ formas de escolher quatro alunos que possuem calculadoras da marca C (10 alunos) ou N (5 alunos).

A expressão ${}^{30}C_5 - {}^{15}C_5 - 15 \times {}^{15}C_4$ permite então determinar de quantas maneiras podem ser escolhidos cinco alunos, de modo que pelo menos dois deles possuam uma máquina de calcular da marca T.

10. $P(A \cup B) - P(B|A) - P\left(\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cap (A \cup B)\right) = P(A \cup B) - P(B) - P\left(\left(\overline{A \cup B}\right) \cap (A \cup B)\right) =$

$= P(A \cup B) - P(B) - P(\emptyset) =$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(B) - 0 =$

$= P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) - P(B) =$

$= P(A) - P(A) \times P(B) =$

$= P(A)[1 - P(B)] =$

$= P(A) \times P(\overline{B})$ c.q.d.

11. O termo geral do desenvolvimento de $\left(\frac{x^4}{2} - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^n$, com $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, ordenado segundo potências decrescentes da primeira parcela, é ${}^nC_k \times \left(\frac{x^4}{2}\right)^{n-k} \times \left(-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^k$, com $k \in \{0,1,\dots,n\}$.

$${}^nC_k \times \left(\frac{x^4}{2}\right)^{n-k} \times \left(-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^k = {}^nC_k \times 2^{-n+k} \times x^{4n-4k} \times (-1)^k \times x^{-k} \times x^{-\frac{k}{2}} =$$

$$= {}^nC_k \times 2^{-n+k} \times (-1)^k \times x^{4n-\frac{11k}{2}}$$

Sabe-se que $\frac{7}{16}x^{21}$ é o terceiro termo desse desenvolvimento, ordenado segundo potências decrescentes da primeira parcela. Logo, ${}^nC_2 \times 2^{-n+2} \times (-1)^2 \times x^{4n-11} = \frac{7}{16}x^{21}$.

Então:

$$\begin{cases} 4n - 11 = 21 \\ {}^nC_2 \times 2^{-n+2} \times (-1)^2 = \frac{7}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4n = 32 \\ {}^nC_2 \times 2^{-n+2} \times (-1)^2 = \frac{7}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 8 \\ {}^nC_2 \times 2^{-n+2} \times (-1)^2 = \frac{7}{16} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 8 \\ {}^8C_2 \times 2^{-6} = \frac{7}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 8 \\ \frac{28}{64} = \frac{7}{16} \end{cases} \Leftrightarrow n = 8$$