TESTE N.º 1 – Proposta de resolução

1.

1.1. $\underbrace{\underline{R} \quad \underline{D} \quad \underline{V_1} \quad \underline{V_2} \quad \underline{V_3} \quad \underline{V_4}}$

$4! \quad \times \quad 4! \quad \times \quad 6! \quad = 414\,720$

- $4!$ é o número de maneiras distintas de os quatro reis permutarem entre si;
- $4!$ é o número de maneiras distintas de as quatro damas permutarem entre si;
- $6!$ é o número de maneiras distintas de o bloco dos reis, o bloco das damas e os quatro valetes permutarem entre si.

1.2. Existem três casos mutuamente exclusivos: saírem 0 ases ou sair 1 ás ou saírem 2 ases.

- ${}^{48}C_5$ é o número de maneiras distintas de se escolher cinco cartas que não são ases sem que a ordem interesse.
- ${}^{4}C_1 \times {}^{48}C_4$ é o número de maneiras distintas de se escolher um ás e quatro cartas que não são ases sem que a ordem interesse.
- ${}^{4}C_2 \times {}^{48}C_3$ é o número de maneiras distintas de se escolher dois ases e três cartas que não são ases, sem que a ordem interesse.

Assim, ${}^{48}C_5 + {}^{4}C_1 \times {}^{48}C_4 + {}^{4}C_2 \times {}^{48}C_3 = 2\,594\,400$ é o número pedido.

1.3. Opção (D)

Número de casos possíveis:

$13^4 = 28\,561$ é o número de maneiras distintas de o André, o António, o Pedro e o Rodrigo escolherem, cada um, uma carta do naipe de paus.

Número de casos favoráveis: ${}^{4}C_2 \times 1 \times 1 \times 12 \times 12$

${}^{4}C_2$ é o número de maneiras diferentes de escolher quem são os dois rapazes que vão escolher o rei de paus e, por cada uma destas maneiras, existem 12×12 modos distintos de os restantes dois rapazes escolherem, cada um, uma carta de paus diferente do rei.

Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{{}^{4}C_2 \times 12^2}{13^4} = \frac{864}{28\,561}$.

2. $\underline{2}$ __ __ __ __ __ ou $\underline{4}$ __ __ __ __ __ ou $\underline{5}$ __ __ __ __ __

$4 \times 4 \times {}^{3}C_2 \quad + \quad 5 \times {}^{4}C_2 \times 2! \quad + \quad 5 \times {}^{4}C_2 \times {}^{2}C_2$

Existem três casos mutuamente exclusivos:

- o número começa por 2: o algarismo 0 pode ocupar quatro posições distintas (unidades, dezenas, centenas ou unidades de milhar). Por cada uma destas posições, existem quatro posições diferentes para colocar o algarismo 2 que falta.

Por cada uma destas maneiras, existem ${}^3C_2$ modos diferentes de escolher as posições dos dois algarismos 4. Finalmente, o algarismo 5 só tem uma posição possível.

- o número começa por 4: o 0 pode ocupar qualquer uma das cinco posições distintas (unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar ou dezenas de milhar). Por cada uma destas posições, existem ${}^4C_2$ formas diferentes de escolher as posições para os dois algarismos 2.

  Por cada uma destas formas, existem 2! modos distintos de escolher as posições do algarismo 4 e do algarismo 5.
- o número começa por 5: o 0 pode ocupar qualquer uma das cinco posições distintas (unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar ou dezenas de milhar). Por cada uma destas posições, existem ${}^4C_2$ formas diferentes de escolher as posições para os dois algarismos 2.

  Por cada uma destas formas, existe apenas uma maneira (${}^2C_2$) de colocar os dois algarismos 4 nas posições que sobram.

Assim, o número pedido é igual a $4 \times 4 \times {}^3C_2 + 5 \times {}^4C_2 \times 2! + 5 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2 = 138$.

3. Opção (B)

Como a linha do triângulo de Pascal tem 13 elementos, então $n = 12$.

Assim, os elementos dessa linha são:

${}^{12}C_0$	${}^{12}C_1$	${}^{12}C_2$	...	${}^{12}C_{10}$	${}^{12}C_{11}$	${}^{12}C_{12}$
1	12	66	...	66	12	1

Para que a soma seja 13, teremos que escolher um 1 e um 12.

Assim, o número de casos favoráveis é igual a 2×2 e o número de casos possíveis é igual a ${}^{13}C_2$.

Logo, a probabilidade pedida é igual a $\frac{4}{{}^{13}C_2} = \frac{2}{39}$.

4. O termo geral deste desenvolvimento é:

$${}^6C_k \ a^{6-k} \times (2x)^k = {}^6C_k \ a^{6-k} \times 2^k \times x^k, \text{ com } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

O termo em x^3 ocorre quando $k = 3$:

$${}^6C_3 \times a^3 \times 2^3 = -160 \Leftrightarrow 160a^3 = -160$$

$$\Leftrightarrow a^3 = -1$$

$$\Leftrightarrow a = -1$$

5. Sabemos que $P(A)=0{,}3$ e que $P(B)=0{,}5$. Além disso:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=0{,}4 \Leftrightarrow P(\overline{A\cup B})=0{,}4$$
$$\Leftrightarrow 1-P(A\cup B)=0{,}4$$
$$\Leftrightarrow 1-0{,}4=P(A\cup B)$$
$$\Leftrightarrow P(A\cup B)=0{,}6$$

Sabemos que:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Então:

$$0{,}6=0{,}3+0{,}5-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}8-0{,}6$$
$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}2$$

$$P(\overline{B}|(A\cup B))=\frac{P\left(\overline{B}\cap(A\cup B)\right)}{P(A\cup B)}=$$
$$=\frac{P\left((\overline{B}\cap A)\cup\overbrace{(\overline{B}\cap B)}^{\emptyset}\right)}{P(A\cup B)}=$$
$$=\frac{P\left((A\cap\overline{B})\cup\emptyset\right)}{P(A\cup B)}=$$
$$=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(A\cup B)}=$$
$$=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=$$
$$=\frac{0{,}3-0{,}2}{0{,}6}=$$
$$=\frac{0{,}1}{0{,}6}=$$
$$=\frac{1}{6}$$

6. Opção (B)

Número de casos possíveis: 9!

Número de casos favoráveis: ${}^4A_3\times 6!$, onde ${}^4A_3$ é o número de maneiras de escolher ordenadamente três dos quatro algarismos primos (2, 3, 5 e 7) para ocupar os três primeiros lugares. Por cada uma destas maneiras, existem 6! formas de colocar os restantes seis algarismos (um primo e cinco não primos) nos restantes seis lugares.

A probabilidade pretendida é $\frac{{}^4A_3\times 6!}{9!}=\frac{1}{21}$.

7. Opção (C)

Número de casos possíveis:

$$\underbrace{\underline{7} \times \underline{7} \times \underline{7} \times \underline{7} \times \overset{\cdots}{\ldots} \times \underline{7}}_{n \text{ amigos}} = 7^n = {}^{7}A'_n$$

Número de casos favoráveis:

$$\underbrace{\underline{1} \times \underline{1} \times \underline{1} \times \underbrace{\underline{6} \times \overset{\cdots}{\ldots} \times \underline{6}}_{n-3 \text{ amigos}}}_{n \text{ amigos}} \times {}^{n}C_3 = {}^{n}C_3 \times 6^{n-3}$$

Observe-se que ${}^{n}C_3$ é o número de maneiras de formar o grupo de amigos que escolheu a quinta-feira, sendo que, por cada umas destas maneiras, há 6^{n-3} maneiras de os restantes $n-3$ amigos escolherem um dos seis dias da semana que não a quinta-feira.

8. Pretendemos determinar quantos números naturais pares de sete algarismos se podem escrever utilizando um algarismo 0, um algarismo 1, dois algarismos 8 e três algarismos 9.

Existem dois casos mutuamente exclusivos: ou terminam em 0 ou terminam em 8.

No caso de o número terminar em 0, existem ${}^{6}C_2$ maneiras distintas de escolher as posições dos dois algarismos 8 e, por cada uma destas maneiras, existem ${}^{4}C_3$ maneiras distintas de escolher as posições dos três algarismos 9. Para cada uma destas maneiras, só existe uma posição para colocar o algarismo 1. Assim, ${}^{6}C_2 \times {}^{4}C_3$ é o número de números pares nas condições pedidas e que terminam em 0.

No caso de o número terminar em 8, existem cinco maneiras distintas de escolher a posição do 0 (não pode ocupar a primeira posição) e, por cada uma destas maneiras, existem cinco maneiras distintas de escolher a posição do algarismo 8 que resta. Para cada uma destas maneiras, existem ${}^{4}C_3$ maneiras distintas de escolher as posições dos três algarismos 9. Feito isto, o algarismo 1 só tem uma maneira de ser colocado. Assim, $5^2 \times {}^{4}C_3$ é o número de números pares nas condições pedidas e que terminam em oito.

${}^{6}C_2 \times {}^{4}C_3 + 5^2 \times {}^{4}C_3$ é, então, uma resposta correta ao problema.

9. Opção (B)

$$\frac{(n-1)! - {}^{n}A_n}{(n-1)!} = \frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n \times (n-1)! - n(n-1)!}{(n-1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)![(n+1)n - n]}{(n-1)!} =$$

$$= n^2 + n - n =$$

$$= n^2$$

- Na opção (A): ${}^{n}C_n \;= 1$
- Na opção (B): ${}^{n}C_1 \;\times {}^{n}C_{n-1} = n \times {}^{n}C_1 \;= n \times n = n^2$
- Na opção (C): ${}^{n}C_1 \;= n$
- Na opção (D): ${}^{n}C_1 \;+ {}^{n}C_{n-1} = n + n = 2n$

10. Sabe-se que $\frac{P(A|B)}{P(B)} = 1$.

Assim:

$P(A|B) = P(B) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = (P(B))^2$

Como:

$P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) =$

$= P(A) + 1 - P(B) - \big(P(A) - P(A \cap B)\big) =$

$= 1 - P(B) + P(A \cap B)$

e $P(A \cap B) = (P(B))^2$, vem que:

$P(A \cup \overline{B}) = 1 - P(B) + \big(P(B)\big)^2 = \big(P(B)\big)^2 - P(B) + 1$, como queríamos demonstrar.

11. Consideremos os acontecimentos:

M: "o cientista é da área da Matemática"

N: "o cientista é português"

Do enunciado, sabemos que:

- $P(M) = 0{,}4$
- $P(\overline{N}|M) = \frac{3}{5}$

Pretende-se saber $P(\overline{N} \cup \overline{M})$:

Como $P(\overline{N}|M) = \frac{3}{5}$ e $P(M) = 0{,}4$, tem-se que:

$\frac{P(\overline{N} \cap M)}{P(M)} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow P(\overline{N} \cap M) = \frac{3}{5} \times 0{,}4 \Leftrightarrow P(M) - P(M \cap N) = 0{,}24$

$\Leftrightarrow 0{,}4 - P(M \cap N) = 0{,}24$

$\Leftrightarrow P(M \cap N) = 0{,}16$

Assim:

$P(\overline{N} \cup \overline{M}) = P(\overline{N \cap M}) = 1 - P(N \cap M) =$

$= 1 - 0{,}16 =$

$= 0{,}84$

A probabilidade de o cientista não ser português ou não ser da área da Matemática é 84%.

12. Existem três tipos de casos que se excluem mutuamente:

- 1.º caso: cada autocaravana leva cinco amigos;
- 2.º caso: duas autocaravanas levam quatro amigos e a outra leva sete;
- 3.º caso: uma autocaravana leva quatro amigos, outra leva cinco e a outra leva seis amigos.

Assim, para distribuir os amigos pelas três autocaravanas diferentes:

- no 1.º caso existem $^{15}C_5 \times {}^{10}C_5 \times {}^{5}C_5 \times 3! = 4\,540\,536$ maneiras;
- no 2.º caso existem $^{15}C_4 \times {}^{11}C_4 \times {}^{7}C_7 \times 3! = 2\,702\,700$ maneiras;
- no 3.º caso existem $^{15}C_4 \times {}^{11}C_5 \times {}^{6}C_6 \times 3! = 3\,783\,780$ maneiras.

No total, existem, então, 11 027 016 maneiras diferentes de os amigos se distribuírem pelas três autocaravanas.