Prova-Modelo de Exame de Matemática A

2020 / 2021

Prova-Modelo de Exame

Matemática A

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

A prova inclui 11 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha r \quad (\alpha - \text{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; } r - \text{raio})$

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro } \times \text{Apótema}$

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2} \quad (\alpha - \text{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; } r - \text{raio})$

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g \quad (r - \text{raio da base; } g - \text{geratriz})$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2 \quad (r - \text{raio})$

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base } \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base } \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3 \quad (r - \text{raio})$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a\ \cos b + \text{sen}\, b\ \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\ \cos b - \text{sen}\, a\ \text{sen}\, b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n\, u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\, u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \,\text{sen}\, u$

$(\text{tg}\, u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\, \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

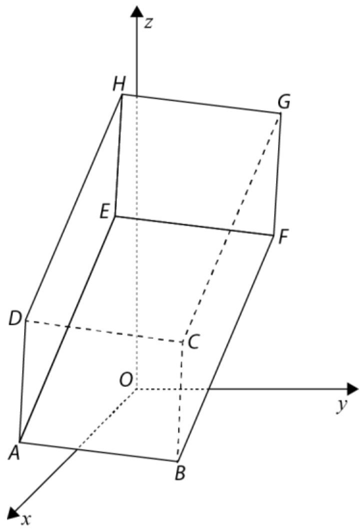
$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- o plano ABC é definido por $2x + 3y + 6z - 31 = 0$;
- as coordenadas do ponto H são $(9,3,17)$.



* **1.1.** A superfície esférica de centro H e tangente ao plano xOz pode ser definida por:

(A) $(x-9)^2 + (y-3)^2 + (z-17)^2 = 3$

(B) $(x-9)^2 + (y-3)^2 + (z-17)^2 = 9$

(C) $(x-9)^2 + (y-3)^2 + (z-17)^2 = 17$

(D) $(x-9)^2 + (y-3)^2 + (z-17)^2 = 81$

* **1.2.** Determine a altura do prisma relativamente à base $[ABCD]$.

2. No início deste ano foi realizado um estudo de mercado acerca dos hábitos de consumo das famílias portuguesas, durante o ano de 2020, no que diz respeito ao uso regular de plataformas *online* para a realização das suas compras. Para tal, realizou-se um inquérito à pessoa do agregado familiar que habitualmente faz as compras de bens alimentares para a família, e concluiu-se que:

- 40% dos responsáveis pelas compras têm idade inferior a 45 anos;
- em cada 9 responsáveis pelas compras, com idade não inferior a 45 anos, apenas 2 usam plataformas de compras *online* regularmente;
- 10% dos responsáveis pelas compras não usam regularmente plataformas *online* e têm idade inferior a 45 anos.

O João participou neste estudo e faz habitualmente as compras de casa usando plataformas *online*. Qual é a probabilidade de o João ter uma idade inferior a 45 anos?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

* **3.** Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$ e a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log x$. A que é igual $\lim f(u_n)$?

(A) $\frac{\ln 10}{2}$ **(B)** $\frac{2}{\ln 10}$ **(C)** $\frac{e^2}{10}$ **(D)** $\frac{10}{e^2}$

4. Considere uma progressão aritmética (a_n) e uma progressão geométrica (b_n), das quais se sabe que têm a mesma razão e o mesmo primeiro termo.

Sabe-se ainda que a soma dos primeiros cinquenta termos de (a_n) é $662{,}5$ e que a soma dos cinquenta termos seguintes é $1912{,}5$.

Seja S_n a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica (b_n).

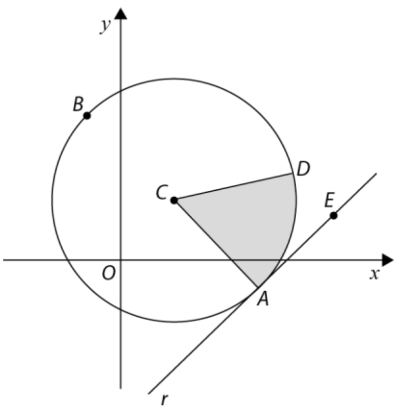
Calcule $\lim S_n$.

5. Considere todos os números naturais de sete algarismos que se podem escrever utilizando dois algarismos 5, um algarismo 6, três algarismos 8 e um algarismo 0.

Escolhendo um desses números ao acaso, determine a probabilidade de o número escolhido ser múltiplo de 5 e menor do que oito milhões.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

6. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy, a circunferência de centro C e de diâmetro $[AB]$ e a reta r que contém o ponto E e é tangente à circunferência no ponto A.



Sabe-se ainda que:

- as coordenadas dos pontos A e B são, respetivamente, $(3,-1)$ e $(-1,4)$;
- a área do setor circular, representado a sombreado na figura, é $\frac{41\pi}{48}$.

Qual é o valor exato do produto escalar $\overrightarrow{CB} \cdot \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AE}\right)$?

(A) $-\frac{41\sqrt{3}}{8}$ **(B)** $\frac{41\sqrt{3}}{8}$ **(C)** $-\frac{41}{8}$ **(D)** $\frac{41}{8}$

7. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$.

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2$.

Sem recorrer à calculadora, prove que existe pelo menos um $c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que a reta tangente ao gráfico de f em c é paralela à reta tangente ao gráfico de g em c.

8. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \frac{x}{e^{2x}}$.

Sabe-se que existe um $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to a} \frac{xe^{-2x} - ae^{-2a}}{x-a} = 0$.

Qual é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de h em $x = a$?

(A) $y = e$

(B) $y = 2e$

(C) $y = \frac{1}{e}$

(D) $y = \frac{1}{2e}$

9. Resolva, em $\mathbb{R}$, sem recorrer à calculadora, a equação $\ln(e^{2x} + 4) = x + \ln(4)$.

10. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{e^{2x} - 1} & \text{se} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{se} \quad x = 0 \\ \dfrac{1}{2} + x\ln(x) & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

10.1. Averigúe se a função g é contínua em $x = 0$.

10.2. Estude a função g quanto à monotonia, em $]0, +\infty[$, e determine, caso exista(m), o(s) extremo(s) relativo(s).

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

11. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 = -\bar{z}$.

Sabe-se que, no plano complexo, os afixos dos números complexos que são soluções desta equação são os vértices de um polígono.

Determine a área desse polígono.

12. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Seja z um número complexo tal que $|z+i|^2 + |z-i|^2 \leq 20$.

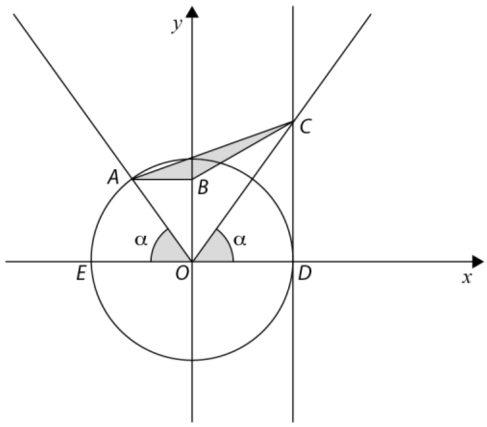
Mostre que o afixo de z pertence ao círculo de centro na origem do referencial e raio igual a 3.

13. Considere as funções f e g definidas, em $\mathbb{R}$, respetivamente, por $f(x) = \text{sen}\, x - \frac{1}{2}\text{sen}(2x)$ e $g(x) = 2\text{sen}x$.

* **13.1.** Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- o ponto A está no segundo quadrante e pertence à circunferência;
- o ponto D tem coordenadas $(1, 0)$;
- o ponto E tem coordenadas $(-1, 0)$;
- o ponto C pertence ao primeiro quadrante e tem abcissa igual à do ponto D;
- o ponto B pertence ao eixo Oy e é tal que o segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao eixo Ox;
- os ângulos DOC e AOE são geometricamente iguais e cada um deles tem amplitude α $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.



A área do triângulo $[ABC]$, representado a sombreado na figura, pode ser dada em função de α por:

(A) $f(\alpha)$ **(B)** $2\,f(\alpha)$ **(C)** $\frac{f(\alpha)}{2}$ **(D)** $\frac{f(\alpha)}{4}$

* **13.2.** Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, determine as abcissas dos pontos de interseção dos gráficos das funções f e g.

14. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^-$, definida por $h(x) = \frac{\ln(-x) - x + e^x}{x}$.

Estude, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, a função h quanto à existência de assíntotas verticais e horizontais ao seu gráfico e, caso exista(m), escreva a(s) sua(s) equação(ões).

15. Seja a um número real pertencente ao intervalo $]0, 2[$.

Considere as funções f e g, definidas em $\mathbb{R}$, por $f(x) = e^a x^2 + x + 1$ e $g(x) = \ln(a)x + a$.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o(s) valor(es) de a, para o(s) qual(is) os gráficos das funções f e g se intersetam num único ponto.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o(s) valor(es) de a com arredondamento às centésimas.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**1.2.**	**3.**	**4.**	**6.**	**8.**	**10.1.**	**10.2.**	**13.1.**	**13.2.**	**15.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	12	14	14	**144**
Destes 7 itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**5.**	**7.**	**9.**	**11.**	**12.**	**14.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	4 x 14 pontos											**56**
TOTAL												**200**