1.

1.1. Número total de alunos: $2 + 10 + 8 + 3 = 23$

Número de alunos com mais de 14 anos: $8 + 3 = 11$

A: "selecionar um aluno com mais de 14 anos"

$$P(A) = \frac{11}{23}$$

1.2. A moda das idades dos alunos da constituição inicial da turma é 14 anos.

Assim, os dois alunos que entraram para a turma, no final do primeiro período, têm 14 anos.

Desta forma, a média de idades da nova distribuição será dada por:

$$\bar{x} = \frac{2 \times 13 + 12 \times 14 + 8 \times 15 + 3 \times 16}{23 + 2} = 14{,}48$$

2. Opção [D]

O algarismo das centenas poderá ser um qualquer elemento do conjunto, com exceção do 0, pois, nesse caso, o número seria constituído por menos de três algarismos. Temos, então, 9 possibilidades para o algarismo das centenas.

O algarismo das dezenas poderá ser um qualquer elemento do conjunto, com exceção do algarismo que foi colocado nas centenas, visto que não se podem repetir. Temos, então, 9 possibilidades para o algarismo das dezenas.

O algarismo das unidades terá de ser diferente dos algarismos já utilizados nas centenas e nas dezenas. Temos, então, 8 possibilidades para o algarismo das unidades.

Assim, é possível formar $9 \times 9 \times 8 = 648$ números naturais com três algarismos.

3.

3.1. Número total de bolas: $6 + 4 = 10$

Número de bolas pretas com um número par: 3

A: "retirar uma bola preta com um número par"

$$P(A) = \frac{3}{10}$$

3.2. Como a primeira bola extraída foi preta e a segunda foi branca, podemos representar a situação através da seguinte tabela de dupla entrada:

	1	**2**	**3**	**4**
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$
4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$
5	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$
6	$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$

Número de casos possíveis: $6 \times 4 = 24$

Número de casos favoráveis: 16

B: "o número formado ser maior do que 30"

$$P(B) = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

4. Opção [B]

$30 \div 6 = 5$

5. $f(8) = \frac{1}{4} \times 8 = 2$

Logo, $P(8, 2)$. A função g é de proporcionalidade inversa, pelo que é do tipo $g(x) = \frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R}$.

Como P pertence ao gráfico de g, $k = 8 \times 2 = 16$. Assim, $g(x) = \frac{16}{x}$.

6. f é uma função de proporcionalidade inversa cuja constante de proporcionalidade inversa é 8.

Assim, f pode ser definida por $f(x) = \frac{8}{x}$ $(x > 0)$.

O ponto B pertence ao gráfico da função f e tem a mesma abcissa do ponto A, logo é do tipo $B(4, f(4))$. Como $f(4) = \frac{8}{4} = 2$, vem que $B(4,2)$, pelo que $\overline{AB} = 2$.

Como $\overline{OA} = 4$, podemos, através do teorema de Pitágoras, determinar $\overline{OB}$:

$\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{OB}^2 = 4^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{OB}^2 = 20$

Como $\overline{OB} > 0$, $\overline{OB} = \sqrt{20}$.

Assim:

$P_{[OAB]} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{OB} = 4 + 2 + \sqrt{20} \approx 10{,}5.$

7. Para determinar a área do retângulo [*OABC*], basta determinar as coordenadas do ponto *B*.

O ponto *B* resulta da interseção dos gráficos das funções *f* e *g*.

Assim:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 = 2x \Leftrightarrow -x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(-x-2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = -2$$

Como a abcissa do ponto *B* é negativa, $x = -2$.

Por outro lado, para descobrir a ordenada do ponto *B*, basta fazer, por exemplo,

$g(-2) = 2 \times (-2) = -4$.

Assim, $B(-2, -4)$.

Logo, $A_{[OABC]} = |-2| \times |-4| = 2 \times 4 = 8$.

8. Opção [A]

$x^2 - x - 6 = 0$

Para $x = 3$, tem-se $3^2 - 3 - 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, que é uma proposição verdadeira.

Para $x = -2$, tem-se $(-2)^2 - (-2) - 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, que é uma proposição verdadeira.

Assim, $\{3, -2\}$ é o conjunto-solução da equação $x^2 - x - 6 = 0$.

9. $5x^2 + \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow 10x^2 + x = 2 \Leftrightarrow 10x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 10 \times (-2)}}{2 \times 10} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{20} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 9}{20} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-10}{20} \quad \vee \quad x = \frac{8}{20} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad x = \frac{2}{5}$$

Logo, C.S. $= \left\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right\}$.

Fátima Cerqueira Magro
Fernando Fidalgo
Pedro Louçano