Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

Folha 1: *Curvas*

---

1. Para as curvas indicadas abaixo, indique a sua orientação (no caso de esta se encontrar bem definida) e determine a sua equação cartesiana.

   (a) $r(t) = (1 - t^4, t^2), \quad t \in [-1, 2]$.

   (b) $r(t) = (t^2 + 2t, t^4 + 1), \quad t \in [0, 1]$.

   (c) $r(t) = (\sinh t, \cosh t), \quad t \in [0, 1]$.

   (d) $r(t) = (\cos t, 3 - \sin t), \quad t \in [0, \pi]$.

   (e) $r(t) = (e^{-t}, 1 + e^t), t \in [0, 1]$.

   (f) $r(t) = (-\frac{\sin t}{2+\cos t}, \frac{\cos t}{2+\cos t}), \quad t \in [0, 2\pi]$.

   (g) $r(t) = (\sin t, \sin^3 t), \quad t \in \mathbb{R}$.

2. Em cada uma das alíneas seguintes, determine uma parametrização para as curvas indicadas:

   (a) Circunferência de centro $(3, 1)$ e raio 1.

   (b) Circunferência de centro $(2, -1)$ e raio $\sqrt{2}$.

   (c) Elipse de focos em $(0, -1)$ e $(0, 3)$ e semi-eixos $a = 2$ e $b = 3$.

3. Qual a diferença entre os gráficos das equações $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ e $x = a \cosh t,\ y = b \sinh t, \quad t \in \mathbb{R}$?

4. Seja $r(t) = (f(t), g(t)), \quad t \in [a, b]$, uma parametrização de uma curva Γ. Mostre que

   (a) o mesmo sucede com $r_k(t) = (f(tk), g(tk)), \quad t \in [a/k, b/k]$, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$.

   (b) a lei $s(t) = (f(-t), g(-t)), \quad t \in [-b, -a]$, constitui uma parametrização de Γ, mas de orientação contrária.

5. Determine uma parametrização para a circunferência de centro $(1, 1)$, raio 3 e velocidade angular de 5 radianos por segundo.

6. Esboce o gráfico da curva parametrizada por $r(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad t \in [0, 2\pi]$, dita *astróide*. Mostre que a equação cartesiana desta curva é $|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = 1$.

7. A Lua descreve uma órbita praticamente circular à volta da Terra. Considerando a Terra e a Lua como pontos situados a uma distância de 384564 Km um do outro, e tomando como 27,32 dias o tempo que cada órbita (ângulo 2π) demora a ser percorrida, determine uma sua parametrização, com origem na Terra, sendo que a distância é lida em quilómetros e o tempo em dias?

8. Seja $r(t) = (\ln t, e^{-3t}, t^2)$.

   (a) Determine o domínio de r. Para que pontos do domínio é r contínua?

   (b) Calcule r' e r''.

9. Seja Γ a curva de equações paramétricas $x = t^2 - 5,\ y = t^3,\ z = 3t + 1, \quad t \in \mathbb{R}$. Determine as equações paramétricas da tangente a Γ no ponto $r(2)$.

10. Para as seguintes funções dadas abaixo, determine $i)$ o domínio de r, bem como os pontos do domínio para os quais r é contínua; $ii)$ calcule r' e r''.

    (a) $r(t) = (\sqrt{t-1}, \sqrt{2-t})$.

    (b) $r(t) = (\frac{1}{t}, \sin 3t)$.

    (c) $r(t) = (\ln(1-t), \sin t, t^2)$.

    (d) $r(t) = (2\sec t, 3\tan t)$.

11. A posição de uma dada partícula num dado plano é dada por $r(t) = (t^2 + t, t^3),\ \ t \in [0, 2]$. Determine a velocidade e a aceleração num dado instante t. Esboce a trajectória da partícula e represente $r'(t)$ e $r''(t)$.

12. Sendo as órbitas planetárias, elipses de equações paramétricas $x = a\cos t,\ y = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi],\ (0 < a < b)$, interprete fisicamente os vectores $r'(t)$ e $r''(t)$.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

Folha 10: *Coordenadas polares, cilíndricas e esféricas e mudança de coordenadas; integrais duplos, triplos e de superfície revisitados*

---

1. Represente os seguintes domínios em coordenadas polares.

   (a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq R \wedge x \leq y \leq \sqrt{2Rx - x^2}\},\ R > 0.$

   (b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -y \leq x \leq y \wedge 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$

2. Calcule o integral duplo $\int\int_D f(x, y)dxdy$, sendo

   (a) $f(x, y) = y - x$ e D o domínio definido pelas inequações

   $$-3 \leq y - x \leq 1 \wedge 7/3 \leq y + x/3 \leq 3.$$

   (b) $f(x, y) = xy$ e D o domínio definido pelas inequações

   $$x^2/2 \leq y \leq x^2 \wedge 1 \leq xy \leq 2.$$

   (c) $f(x, y) = x$ e D o domínio definido pelas inequações

   $$1 \leq x(y - 1) \leq 2 \wedge 1 \leq xy \leq 2.$$

   Sugestão: use a mudança de coordenadas $x = u + v, xy = v$.

   (d) $f(x, y) = arctg(y/x)$ e D o domínio definido pelas inequações

   $$1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \wedge x/\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}x.$$

   (e) $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$ e D o domínio definido pelas inequações

   $$0 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \wedge xy \geq 0.$$

3. Mostre que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Sugestão: calcule (convenientemente) o integral impróprio

   $$\int\int_{1^o Quad.} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

4. Determine o volume dos seguintes sólidos.

   (a) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq b \wedge z^2 \leq (x/a)^2 + (y/a)^2\},\ \ a, b > 0$ (volume de um cone).

   (b) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1\},\ \ a, b, c > 0$ (volume de um elipsóide).

   (c) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq y \leq \frac{x^2+z^2}{4} + 1\}.$

   (d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0 \wedge z \leq \frac{2-2x-y}{2} \wedge y \leq 1\}.$

5. Determine $\int\int\int_D f(x, y, z)dxdydz$, sendo

   (a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ e $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \wedge z \geq 0\}.$

   (b) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$ e $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge -1 \leq z \leq 1\}.$

6. Calcule a área da superfície S, onde

   (a) $S : z = \frac{x^2+y^2}{2} \leq 2$.

   (b) S é a parte da superfície esférica $x^2+y^2+z^2 = a^2$ interior ao cilíndro definido pela inequação $x^2 + (y - a/2)^2 \leq a^2/4$, com $a > 0$.

7. Calcule $\int\int_S f(x, y, z)dS$ sendo

   (a) $f(x, y, z) = 1$ e $S : 0 \leq z = 2 - x^2 - y^2$;

   (b) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1+4x}}$ e $S : x = y^2 + z^2 \leq 1$.

   (c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $S : (x/a)^2+(y/a)^2 = (z/b)^2 \wedge 0 \leq z \leq b$, com $a, b > 0$.

8. Calcule o fluxo do campo vectorial $f(x, y, z)$ que atravessa a superfície S no sentido indicado.

   (a) $f(x, y, z) = (x, y, z)$, S a metade da superfície esférica de centro na origem e raio $R > 0$, no sentido da origem para o exterior.

   (b) $f(x, y, z) = (x^3+xy^2, x^2y+y^3, x^2y)$, S a superfície dada por $z = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$ no sentido da normal com componente-z negativa.

   (c) $f(x, y, z) = (x^3y, x^2y^2, x)$, S a superfície dada por $2 \leq z = 2(x^2 + y^2) \leq 8, x, y \geq 0$, no sentido da normal com componente-z negativa.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

Folha 11: *Teoremas fundamentais: Green, Stokes e Gauss*

---

1. Calcule a circulação do campo vectorial f ao longo da curva Γ, orientada positivamente, onde

   (a) $f(x,y) = (x^2, xy^3)$, $\quad \Gamma : x^2 + y^2 = 4$.

   (b) $f(x,y) = (y, -x)$, $\quad \Gamma : x^2 + y^2 = 1$.

   (c) $f(x,y) = (\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2})$, $\quad \Gamma : x^2 + y^2 = 1$.

   (d) $f(x,y) = (\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$, $\quad \Gamma : x^2 + y^2 = 1$.

2. Mostre que se o campo vectorial $f = (P, Q)$, de classe C^1, é conservativo (isto é, existe um campo escalar φ de classe C^2 tal que $f = \bigtriangledown\varphi$, ou ainda, f é diferencial total) então $\partial_x Q = \partial_y P$.

3. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial $F(x,y) = (y + 3x, 2y - x)$ para transportar uma partícula ao longo da elipse $4x^2 + y^2 = 4$, percorrida no sentido directo.

4. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial $F(x,y) = (x^2, x+y)$ para transportar uma partícula ao longo da curva $|x|+|y| = 1$, percorrida no sentido directo.

5. Sendo S a superfície definida por $z = 5 - x^2 - y^2$, limitada por $z = 1$, e F o campo vectorial $F(x,y,z) = (0, z, 2y)$, calcule

   (a) $\int\int_S rotF \cdot \hat{n} dS$ (assuma a superfície orientada do interior para o exterior).

   (b) Calcule a circulação de F sobre a curva (orientada positivamente) em que S se apoia.

6. Calcule o fluxo de $F(x,y,z) = (-2x, -y, z)$ através da superfície $y^2 + z^2 = 1$, limitada entre $x = 0$ e $x = 1$.

7. Considere a porção de superfície S definida por $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$, com $z \geq 2$, o campo vectorial $F(x,y,z) = (0, x^2, 1)$.

   (a) calcule a circulação de F sobre a curva Γ (positivamente orientada) em que S se apoia.

   (b) calcule o fluxo de F ao longo da superfície S, sendo S orientada do interior para o exterior.

8. Seja U um campo escalar de classe C^2.

   (a) Mostre que se tem $\Delta U = \bigtriangledown \cdot (\bigtriangledown U)$.

   (b) Sendo U tal que $U(x,y,z) = u(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, u uma função de variável real, mostre que

   $$\int\int\int_V \Delta U dxdydz = 4\pi(b^2 u'(b) - a^2 u'(a)),$$

   onde V é o volume do sólido definido pelas inequações $a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

Folha 12: *Optimização*

---

1. Determine e classifique os pontos críticos das funções f seguintes

$(a)\, f(x,y) = x^2y + xy^2$	$(b)\, f(x,y) = 2(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
$(c)\, f(x,y) = x^2 - y^2$	$(d)\, f(x,y) = (x+y)^2$
$(e)\, f(x,y) = e^{1+(x^2-y^2)}$	$(f)\, f(x,y) = y + x\,\mathrm{sen}\, y$
$(g)\, f(x,y) = x^{20} + y^{36}$	$(h)\, f(x,y) = \log(2 + \mathrm{sen}\,(xy))$

2. Determine os pontos do gráfico de $(x,y) \mapsto \frac{1}{xy}$ que estão mais próximos de $(0,0,0)$.

3. Determine o ponto do plano de equação $2x - y + 2z = 0$ mais próximo de $(0,0,0)$.

4. Mostre que a caixa paralelepipédica com volume dado e área lateral mínima é cúbica.

5. Em cada um dos problemas seguintes determine e classifique os extremos de f sujeitos às condições indicadas; em cada caso explique porque existem tais extremos.
   (a) $f(x,y,x) = x - y + z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2$
   (b) $f(x,y) = x - y, \quad x^2 - y^2 = 2$
   (c) $f(x,y) = x, \quad x^2 + 2y^2 = 3$
   (d) $f(x,y) = x^2 - y^2, \quad y = \cos x$

6. Projecte um contentor cilíndrico metálico, com tampa, de capacidade 1ℓ com a mínima área de metal possível.

7. Determine e classifique todos os extremos (locais ou absolutos) de f no conjunto indicado; em cada caso explique porque existem tais extremos.
   (a) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y2 + z^2}, \quad C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ |x| + |y| + |z| \leq 1\}$
   (b) $f(x,y,z) = |x| + |y| + |z|, \quad C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq 1\}$
   (c) $f(x,y,z) = x + y + z, \quad C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq 1\}$
   (d) $f(x,y) = \mathrm{sen}\left(x^2+y^2\right), \quad C = \overline{B}_r(0,0) \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (r > 0)$
   (e) $f(x,y) = \mathrm{sen}\left(x^2+y^2\right), \quad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ |x| + |y| \leq r\} \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (r > 0)$

8. O método dos multiplicadores de Lagrange pode ser generalizado.
   (a) Por exemplo a duas condições
   Sejam $f, g, h : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 e C um subconjunto de D definido por
   $$\exists k, r \in \mathbb{R}\ \forall x \in D \quad \left[x \in C \ :\equiv \begin{cases} g(x) & = & k \\ h(x) & = & r \end{cases} \right];$$
   suponha-se ainda que
   $$\begin{array}{rcl} f(x_0) & \text{é} & \text{extremo de } f \text{ em } C \\ \forall x \in C \quad \{\nabla g(x_0),\ \nabla h(x_0)\} & \text{é} & \text{linearmente independente.} \end{array}$$
   Nestas condições
   $$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0) + \mu \nabla h(x_0).$$
   (b) Determine os extremos de $x + y + z$ no conjunto definido pelas condições
      i. $x^2 + y^2 = 2$ e $x + z = 1$.
      ii. $x^2 - y^2 = 1 = 2x + z$.

9. Determine a área máxima delimitada por um pentágono com perímetro fixo e composto de um rectângulo encimado por um triângulo isósceles.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

Folha 2: *Curvas - aplicações físicas e comprimento de arco*

---

1. Considere que $r(t) = \left(4 + (t-1)^2, \sqrt{t^2+1}(t-1)^3, \frac{(t-1)^3}{t^5}\right)$ descreve a posição de um objecto em $\mathbb{R}^3$ como uma função de t, onde t é medido em segundos e $r(t)$ é medido em metros. Será que o objecto tem, em algum momento, velocidade nula? Em caso afirmativo, encontre o valor de t no qual isto ocorre e o ponto de $\mathbb{R}^3$ no qual a velocidade é nula.

2. Seja $r(t) = \left(\sin t, t^2, \cos(t^2)\right)$, para $t \in [0, 5]$. Encontre a recta tangente à curva parametrizada por r no ponto $r(2)$.

3. Seja $r(t) = \left(\sin t, \cos(t^2), t+1\right)$ a equação do movimento de um dado objecto em função da variável tempo $t \in [0, +\infty[$. Quais são a sua velocidade e aceleração no instante $t = 3$?

4. Suponha que um objecto tem a posição $r(t) \in \mathbb{R}^3$ onde r é diferenciável e suponha também que $\|r(t)\| = c$, onde c é uma constante.

   (a) Justifique que esta condição não obriga a que $r(t)$ seja um vector constante.

   (b) Mostre que $r'(t) \cdot r(t) = 0$. Ou seja, a velocidade é sempre perpendicular ao vector de posição do deslocamento.

5. Suponha que um objecto com a massa de 5 kilogramas é sujeito a uma força dependente do tempo, $F(t) = e^t i + \cos(t) j + t^2 k$ kilogramas metro por seg^2. Suponha adicionalmente que no tempo $t = 0$ o objecto se encontra no ponto $(0, 1, 1)$ metros e que a sua velocidade nesse momento é $v = i + j - k$ metros por segundo. Indique a posição do objecto à custa de uma função de t.

6. Um canhão é disparado numa vasta planície com um ângulo θ em relação ao chão. A velocidade da bola quando sai da boca do canhão é conhecida e vale s metros por segundo.

   (a) Desprezando a resistência do ar, encontre uma fórmula que descreva até que posição é que a bola vai antes de bater no chão. Mostre que o alcance máximo da bola do canhão é obtido quando $\theta = \pi/4$.

   (b) Suponha que a massa da bola do canhão é de 10 kilogramas e sofre uma força da resistência do ar de $0,01v$ Newtons, onde v é a velocidade em metros por segundo. A aceleração da gravidade é de $9,8$ metros por seg^2. Suponha adicionalmente que a velocidade inicial é de 100 metros por segundo. Encontre a fórmula para o deslocamento $r(t)$ da bola do canhão. Supondo que o ângulo de elevação é de $\pi/4$, estime o tempo gasto até que a bola do canhão atinja o chão.

7. Calcule o comprimento da curva

   (a) de equação $y = x^{3/2}$ e compreendida entre os pontos $(1, 1)$ e $(2, 2\sqrt{2})$.

   (b) de equações $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$, onde $t \in [0, 2\pi]$ e a é uma constante positiva.

(c) de equações $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$, onde $t \in [0, 2\pi]$ e a e uma constante positiva.

(d) de equação $y = \arcsin(e^{-x})$ e compreendida entre os pontos de abcissa $x = 0$ e $x = 1$.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

Folha 3: *Continuidade de funções de várias variáveis*

---

1. Esboce os seguintes conjuntos e indique, para cada caso, qual o seu interior, a fronteira e o fecho, e se são fechados ou abertos.

   (a) o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ que satisfaz $|x-3|+|y-1|<2$.

   (b) o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ que satisfaz $max\{|x-3|,|y-1|\}<2$.

   (c) o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ que satisfaz $y \geq x^2$.

   (d) o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^3$ que satisfaz $y \neq z$.

2. Para as seguintes funções vectoriais, determine o seu domínio de definição e o conjunto de pontos onde é contínua.

   (a) $f(x,y) = \arcsin(2/x) + \sqrt{xy}$;

   (b) $f(x,y) = e^{\tan(y-x^2)}$;

   (c) $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$;

   (d) $f(x,y) = (\sqrt{1-x^2-y^2}, \ln|y-x^2|)$;

   (e) $f(t,z) = (a\cos t, a\sin t, z)$;

3. Sejam $f,g,h : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, funções reais de variável real. Considere um ponto de acumulação a do domínio D. Mostre que

   (a) se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e g é limitada, então tem-se $\lim_{x\to a}(gf)(x) = 0$.

   (b) se $g(x) \leq f(x) \leq h(x), \forall x \in D$ então, temos também

   $$\lim_{x\to a} g(x) \leq \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} h(x),$$

   na condição destes limites existirem.

4. Para as seguintes funções vectoriais, determine o seu domínio e verifique se existe o limite indicado.

   (a) $f(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{x-y}$, $\quad \lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y) \quad (a \in \mathbb{R})$;

   (b) $f(x,y) = xe^{\arctan(y/x)}$, $\quad \lim_{(x,y)\to(0,a)} f(x,y) \quad (a \in \mathbb{R})$;

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} x^2, & x^2+y^2 < 2y \\ |x|, & x^2+y^2 = 2y \\ y^2, & x^2+y^2 > 2y \end{cases}$, $\quad \lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y)$;

   (d) $f(x,y) = (e^{x+y}, \sin(x+y), x^2\sin(1/x))$, $\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$;

   (e) $f(x,y) = (\frac{2xy^2}{x^2+y^2}, xy^2\cos(x^2+y^2))$, $\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$;

5. Determine a função composta (bem como o respectivo domínio):

   (a) $f \circ r(t)$, onde $f(x,y) = \cos(xy^2)e^{xy}$ e $r(t) = (\cos t, \sin t)$.

   (b) $f \circ r(\theta,\varphi)$, onde $f(x,y,z) = \|(x,y,z)\|$ e $r(\theta,\varphi) = (\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

Folha 4: *Integrais duplos e triplos*

---

1. Para os seguintes domínios de integração e funções integrandas, determine, se existir, $\int\int_R f(x,y)dxdy$.
   (a) $f(x,y) = xy(x+y), \quad R = [0,1]^2$.
   (b) $f(x,y) = x^3 + 3x^2y + y^3, \quad R = [0,1]^2$.
   (c) $f(x,y) = \sqrt{y} + x - 3y^2, \quad R = [0,1] \times [0,2]$.
   (d) $f(x,y) = \sin(x+y), \quad R = [0,\pi/2]^2$.
   (e) $f(x,y) = \sin^2(x)\sin^2(y), \quad R = [0,\pi/2]^2$.
   (f) $f(x,y) = y^{-3}e^{tx/y}, \quad R = [0,t] \times [1,t], t > 1$.
   (g) $f(x,y) = x\sin(y) - ye^x, \quad R = [-1,+1] \times [0,\pi/2]$.
2. Mostre que, se existirem os integrais reais $\int_a^b f(x)dx$ e $\int_c^d g(y)dy$, então existe o integral duplo $\int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x)g(y)dxdy$, e tem-se
$$\int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x)g(y)dxdy = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right),$$
   onde $(a < b,\ c < d)$.
3. Esboce o domínio de integração D indicado e calcule, se possível, o integral $\int\int_D f(x,y)dxdy$.
   (a) $f(x,y) = 1 - x - y, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x + y \leq 1 \wedge 0 \leq x \leq 1\}$.
   (b) $f(x,y) = x + y, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x^2 \wedge 0 \leq y \leq 4\}$.
   (c) $f(x,y) = e^{y^3}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y^2 \wedge 0 \leq y \leq 1\}$.
   (d) $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x \leq 2 \wedge xy \geq 1\}$.
4. Esboce a superfície S e expresse a sua área por intermédio de integração dupla adequada.
   (a) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 4 - x^2\}$.
   (b) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-R)^2 + y^2 \leq R^2 \wedge y \geq x\}$, onde $R > 0$.
   (c) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq |y| \leq 1\}$.
   (d) sendo S a superfície delimitada pelas curvas de equação $xy = 3$, $2y = x$, $y = 2x$, $x = 0$ e $x = 2$.
   (e) sendo S a superfície delimitada pelas curvas de equação $y^2 - x^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 25$, $|y| = 1$ e $|x| = 2$.
5. Expresse o volume do sólido V por intermédio de integração tripla, sendo:
   (a) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$, com $R > 0$.
   (b) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1\}$, com $a, b, c > 0$.
   (c) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2 \wedge 1 \leq z \leq 2\}$.
   (d) V limitado pelas superfícies de equação $z = x^2 + y^2$ e $4(z-1) = x^2 + y^2$.
   (e) V a porção do 1^o octante limitado pelo plano $2x + y + 2z = 2$.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

Folha 5: *Integrais de linha; campos escalares.*

---

1. Defina $f(x,y,z) := y$ e $r(t) := (0,0,t)$ $(t \in [0,1])$. Mostre que $\int_r f ds = 0$.

2. Calcule $\int_r f ds$ para

   (a) $f(x,y,z) := e^{\sqrt{z}}$; $\quad r(t) := (1,2,t^2) \quad (0 \leq t \leq 1)$

   (b) $f(x,y,z) := yz$; $\quad r(t) := (t,3t,2t) \quad (1 \leq t \leq 3)$

   (c) $f(x,y,z) := \frac{x+y}{y+z}$; $\quad r(t) := (t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}, t) \quad (1 \leq t \leq 2)$

3. Defina $f(x,y) := 2x - y,\ x := t^4,\ y := t^4,\quad |t| \leq 1$. Calcule $\int_{(x(t),y(t))} f ds$ e interprete geometricamente o resultado.

4. Por definição, a **média do campo escalar** $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ **sobre a curva** parametrizada pelo caminho rectificável $t \mapsto r(t)$ de comprimento $\ell(r)$ é $\frac{\int_r f ds}{\ell(r)}$.

   (a) Determine a média da ordenada na semi-circunferência de parametrização $(0, a \operatorname{sen} t, a \cos t) \quad (0 \leq t \leq \pi;\ a > 0)$

   (b) Descreva geometricamente $\rho(I)$ para

$$\begin{aligned} I &:= [0, 2\pi] \\ \rho(t) &:= (1,1,1) + \frac{\cos t}{\sqrt{2}}(1,0,-1) + \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{6}}(1,-2,1) \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \end{aligned}$$

   (c) Determine a média da cota sobre a curva $\rho(I)$.

5. Quando o campo escalar $(x,y) \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ é não negativo pode interpretar-se como uma densidade; nestas condições a **massa**, $M(f,r)$, de um fio parametrizado por $r : I := [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, quando $r(I)$ está contido no domínio de f, é

$$M(f,r) := \int_r f ds$$

   e o **centro de massa** do fio é o ponto

$$\frac{1}{M(f,r)} \left(\int_r x f(x,y) ds, \int_r y f(x,y) ds \right)$$

   Considere $r(t) := (\cos t, \operatorname{sen} t) \quad (0 \leq t \leq \beta)$

   (a) Suponha que f é constante e que $\beta = 2\pi$ e calcule o centro de massa de $r(I)$.

   (b) Repita o exercício anterior com $\beta = \pi$.

   (c) Suponha agora que $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ e repita as duas alíneas anteriores.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

Folha 6: *Integrais de linha; campos vectoriais*

---

1. Suponha que $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e que $f(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calcule $\int_r f \bullet dr$ para os caminhos seguintes.
   (a) $r(t) = (t, t, t), \quad t \in [0, 1]$.
   (b) $r(t) = (\cos t, \mathrm{sen} t, 0), \quad t \in [0, 2\pi]$.
   (c) $r(t) = (\mathrm{sen} t, 0, \cos t), \quad t \in [0, 2\pi]$.
   (d) $r(t) = (t^2, 3t, 2t^3), \quad t \in [-1, 2]$.

2. Calcule
   (a) $\int_r xdy, \qquad r(t) = (e^t, 1), \quad t \in [0, 1]$.
   (b) $\int_r xdy - ydx, \qquad r(t) = (\cos t, \mathrm{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi]$
   (c) $\int_r xdx + ydy, \qquad r(t) = (\cos(\pi t), \mathrm{sen}(\pi t)), \quad t \in [0, 2]$
   (d) $\int_r yzdx + xzdy + xydz$
      i. Sendo r a poligonal de vértices $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$
         A. Na ordem dada.
         B. Na ordem inversa da indicada
         C. Na ordem $(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)$.
      ii. Sendo $r(t) = (3 \cos t, 5 \sin t, 4 \cos t), \quad t \in [0, 2\pi]$

3. Calcule o trabalho realizado pela força f da questão 1. quando desloca o seu ponto de aplicação sobre a parábola de equação $y = x^2$ com $z = 0$ de $(-1, 1, 0)$ a $(2, 4, 0)$.

4. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial (de força) F dado quando desloca o seu ponto de aplicação sobre a curva parametrizada por r
   (a) $F(x, y) = (y, -x), \qquad r(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, \pi]$.
   (b) $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy), \qquad r(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$.
   (c) $F(x, y, z) = (x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2), \qquad r(t) = (t, t^2, t^3), \quad t \in [0, 1]$.
   (d) $F(x, y, z) = (x, y, z), \qquad r(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in [0, 4\pi]$.

5. Suponha que $r : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é um caminho suave e seja f um campo vectorial também suave tal que $r(I)$ está contido no domínio de f. Mostre que
   (a) Se $f(r(t))$ é sempre ortogonal a $r'(t)$, então $\int_r f \bullet dr = 0$.
   (b) Se $f(r(t))$ é sempre paralelo a $r'(t)$, isto é, para alguma função real suave e positiva, λ, $f(r(t)) = \lambda(t) r'(t)$, então $\int_r f \bullet dr = \int_r \|f\| ds$.

6. Suponha que uma ciclista sobe uma colina de equação $x^2 + y^2 + z = 2\pi$, exercendo uma força $F(x, y, z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k}$, ao longo de uma curva de declive constante, partindo do ponto $(\sqrt{2\pi}, 0, 0)$ e atingindo o topo ao fim de uma só volta completa. Qual o trabalho que realizou? Porque razão este modelo não é realista?

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

Folha 7: *Diferenciação*

---

1. Considere as funções definidas de seguida.

(a) $f(x,y) = x^2 + y^3$.

(b) $f(x,y) = (x+2y)^2$.

(c) $f(x,y) = e^x \ln(y^2+1)$.

(d) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$.

(e) $f(x,y) = x\cos(xy)$

(f) $f(x,y) = y^x$.

(g) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

(h) $f(x,y,z) = x^2 + xyz + z^3$

(i) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(j) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \end{cases}$.

Para cada uma determine

I. f_x e f_y.

II. f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} e f_{yy}.

III. f_{xxyy}, f_{xyyx}.

IV. Onde é

i. Contínua

ii. Diferenciável

2. A função $u(x,t) = \sin(x-t) + \sin(x+t)$ modela a forma de uma corda vibrante fixada em $x = 0$ e $x = \pi$.

(a) Após quanto tempo assume a corda a sua forma inicial?

(b) Qual a taxa de variação instantânea da posição u da corda vibrante em $x = \pi/2$ nos instantes $t = \pi/2$, $t = \pi$ e $t = 3\pi/2$?

3. A função $u(x,t) = \frac{5}{9}e^{-t}\sin^2(\frac{\pi}{30}x)$ modela a temperatura em graus Celsius ao longo de um arame de 30 cm de comprimento cujas extremidades são mantidas constantemente à temperatura zero.

(a) O que acontece à temperatura do arame à medida que t aumenta?

(b) Que acontece quando t tende para infinito?

(c) Qual a velocidade com que a temperatura do arame está a variar no ponto $x = 15\,cm$ nos instantes $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$?

4. Em cada uma das alíneas seguintes, calcule as derivadas indicadas , nos interiores dos domínios de definição.

(a) $\dfrac{dw}{dt}$ para $w = x^2y^2$ e $x = t^4$, $y = t^5$.

(b) $\dfrac{dw}{dt}$ para $w = xy$ e $x = e^t$, $y = e^{-t}$.

(c) $\dfrac{dw}{dt}$ para $w = \arctan\frac{y}{x}$ e $x = \sin t$, $y = \cos t$.

(d) $\dfrac{\partial w}{\partial u}, \dfrac{\partial w}{\partial v}$ para $w = x^2 + y^2$ e $x = u^2v$, $y = (u+v)^3$.

(e) $\dfrac{\partial w}{\partial u}, \dfrac{\partial w}{\partial v}$ para $w = \sin x \, \cot y$ e $x = \arcsin(uv)$, $y = \arctan(uv)$.

(f) $\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial t}$ para $w = u^2 + v^2$ e $u = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/(4t)}$, $v = \frac{1}{t} e^{-x^2/(2t)}$.

(g) $J(g \circ f)$ para $g(u, v, w) = (u^w, \sin(v + w))$ e $f(x, y) = (e^{x+y}, x - y, x^2)$.

(h) $J(g \circ f)$ para $g(u, v) = (u + v, uv, \ln v)$ e $f(x, y) = (\sin(x + y), e^x)$.

5. Um campo vectorial contínuo $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se **conservativo** se tiver um **potencial**, isto é, se para alguma função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $F = \nabla f$. Seja $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo contínuo.

   (a) Suponha que f é conservativo com potencial f. Mostre que

      i. Se $r : [a, b] \longrightarrow D$ é um caminho rectificável, então

      $$\int_r F \bullet ds \; = \; f(r(b)) - f(r(a)).$$

      ii. Se $r(I)$ é uma curva fechada, ou seja, $r(a) = r(b)$, então $\int_r F \bullet ds \; = \; O$.

   (b) Suponha que D é convexo e que seja qual for a curva fechada r em D, $\int_r F \bullet ds = 0$; tome $x_0 \in D$ e defina

   $$\sigma(t) \; = \; x_0 + t\,(x - x_0) \quad (t \in [0, 1]; x \in D) \tag{1}$$

   $$f(x) \; = \; \int_\sigma F \bullet ds \quad (x \in D) \tag{2}$$

   Mostre que f é um potencial para F, portanto F é conservativo.

Obs.: Esta é uma generalização do `Teorema Fundamental do Cálculo`.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

Folha 8: *Diferenciação*

---

1. Determine as derivadas das funções f seguintes

$$(a)\ f(x,y) := xy + \arctan(x+y) \qquad (b)\ f(x,y,z) := xy + xz + yz$$
$$(c)\ f(x_1,x_2,x_3,x_4) \ := \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

2. Quando existem todas as derivadas de segunda ordem de uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ em $x \in D$, a matriz $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right]_{1\le i,j\le n}$ diz-se a matriz **hessiana** de f. Quando todas as segundas derivadas são contínuas, a matriz hessiana é simétrica. Determine a matriz hessiana das funções do número anterior.

3. Suponha que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função linear com matriz M. Mostre que a matriz jacobiana de f em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é M.

   OBS.: O trabalho é extraordinariamente simplificado se provar, usando a definição, que f é diferenciável e que M é a matriz da sua derivada em qualquer ponto de $\mathbb{R}^n$.

4. Suponha que M é uma matriz 2×2 de coeficientes reais simétrica, digamos $M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, e designe a matriz hessiana de uma função φ em (x,y) por $H_\varphi(x,y)$; defina uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ por

$$f(x,y) \ := \ \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

   Verifique que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(a)\ \nabla f(x,y) \ = \ 2M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (b)\ H_f(x,y) \ = \ 2M$$

5. Generalize as afirmações constantes no número anterior do seguinte modo:

   Suponha que M é uma matriz $n \times n$ de coeficientes reais e simétrica, ou seja, tal que que a matriz transposta de M é igual a M — $M^T = M$ — e designe a matriz hessiana de uma função φ em $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ por $H_\varphi(x)$; defina uma função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} f(x) \ &:= \ \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \\ &:= \ Mx^{(2)} \qquad (x \in \mathbb{R}^n)\,. \end{aligned}$$

   Verifique que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(a)\ \nabla f(x) \ = \ 2Mx \qquad (b)\ H_f(x) \ = \ 2M$$

Folha 8: *Diferenciação (continuação)*

---

6. Suponha que a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e o segmento de recta $[a, b]$ está contido em D e defina

$$\varphi(t) \;:=\; f\big(a + t(b-a)\big) \quad (t \in [0,1]).$$

   (a) Mostre que

$$\varphi'(t) \;=\; \nabla f\big(a + t(b-a)\big) \bullet (b-a) \quad (t \in [0,1]).$$

   (b) Conclua que

$$\exists c \in]a, b[\quad f(b) - f(a) \;=\; \nabla f(c) \bullet (b-a)$$

   (c) Suponha agora que f é de classe C^2, $0 \neq (h, k) \in \mathbb{R}^2$ e $(a, b) + t(h, k) \in D$ ($|t| \leq 1$)

$$\begin{aligned} f\big(a + th, b + tk\big) \;&=\; f(a,b) + t\nabla f(a,b) \bullet (h,k) + \frac{t^2}{2}\begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} H_f(a) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \\ &\qquad + t^2 \Omega(a,h,k,t) \end{aligned}$$

$$\text{com} \qquad \lim_{t \longrightarrow 0} \Omega(a,h,k,t) \;=\; 0.$$

   Observe que

$$\begin{aligned} \nabla f(a,b) \bullet (h,k) \;&=\; \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k \\ \begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} H_f(a) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \;&=\; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2 \\ &:=\; \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k\right)^{(2)} \end{aligned}$$

   (d) Deduza que, quando f é de classe C^2 e o segmento de recta $[a, x]$ está contido em D, se tem

$$f(x) \;=\; f(a) + \nabla f(a) \bullet (x-a) + \frac{1}{2}(x-a) \bullet \big(H_f(a)(x-a)\big) + \|x-a\|^2 \omega(a,x)$$

   com

$$\lim_{x \longrightarrow a} \omega(a,x) \;=\; 0.$$

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

Folha 9: *Propriedades do gradiente e superfícies em* $\mathbb{R}^3$; *elemento de área e integrais de superfície*

---

1. Sendo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funções de classe C^2, e considerando o vector gradiente (formal) $\bigtriangledown = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, mostre que
   (a) $\bigtriangledown \cdot (fF) = (\bigtriangledown f) \cdot F + f(\bigtriangledown \cdot F)$;
   (b) $\bigtriangledown \times (fF) = (\bigtriangledown f) \times F + f(\bigtriangledown \times F)$;
   (c) $\bigtriangledown \cdot (\bigtriangledown \times F) = 0$;
   (d) $\bigtriangledown \cdot (\bigtriangledown f) = \Delta f$;
   (e) $\bigtriangledown \times (\bigtriangledown \times F) = \bigtriangledown(\bigtriangledown \cdot F) - \bigtriangledown^2 F$;
   (f) $\bigtriangledown \times (\bigtriangledown f) = 0$;

2. Determine o plano tangente e a recta normal à superfície S, definida pela equação dada, no ponto indicado.
   (a) $S : z = x^2 + y^2$, ponto $P = (0, 2, 4)$;
   (b) $S : z = x - 1 + e^y$, ponto $P = (0, 0, 0)$;
   (c) $S : y = x^5 + z^5 + xz$, ponto $P = (1, 3, 1)$;
   (d) $S : x + y + z + \cos(xyz) = 0$, ponto $P = (0, 0, -1)$;
   (e) $S : x^2(y^2 + z^2) = 5$, ponto $P = (1, -1, 2)$;
   (f) $S : z^3 + z - 2e^{x^2+y^2} = 0$, ponto $P = (0, 0, 1)$;

3. Determine o plano tangente e a recta normal à superfície S, definida por
   (a) $r(\theta, \varphi) = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi), (\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, \pi/4]$, no ponto $P = r(\pi/2, \pi/6)$.
   (b) $r(u, v) = (u^2 - uv^3, v^2 - u^2 v, 2uv), (u, v) \in [-2, +2] \times [-4, 4]$, no ponto $P = r(1, -2)$.

4. Dê uma expressão para o valor da área da superfície S, onde
   (a) $S : z = \frac{x^2+y^2}{2} \leq 2$.
   (b) $S : r(\theta, \varphi) = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi)$, com $(\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, \pi/4]$.
   (c) S é a parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ interior ao cilíndro definido pela inequação $x^2 + (y - a/2)^2 \leq a^2/4$, com $a > 0$.
   (d) $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$, com $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$.

5. Determine uma expressão para o cálculo de $\int\int_S f(x, y, z) dS$ sendo
   (a) $f(x, y, z) = 1$ e $S : 0 \leq z = 2 - x^2 - y^2$;
   (b) $f(x, y, z) = 2 - z$ e $S : 0 \leq z = 2 - x^2 - y^2$;
   (c) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1+4x}}$ e $S : x = y^2 + z^2 \leq 1$.
   (d) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $S : (x/a)^2 + (y/a)^2 = (z/b)^2 \wedge 0 \leq z \leq b$, com $a, b > 0$.

6. Determine o fluxo do campo vectorial $f(x, y, z) = (xy, x^2, x + z)$ que atravessa a superfície $S : 2x + 2y + z = 6$, do primeiro octante, em direcção à origem.

Consultar http://amiii.wikidot.com

Obviamente, é impraticável colocar uma cópia aqui, até por questões de formatação.