Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2006/07**

Folha 9: *Gradientes, derivadas direccionais, curvas de nível*

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes, determine a derivada direccional de f no ponto indicado e na direcção (e sentido) do vector dado:

   (a) $f(x,y) = x^3 + y^3$ em $(1,1)$ na direcção de $(2,1)$.

   (b) $f(x,y) = x^4 + y^2$ em $(1,1)$ na direcção de $(-3,4)$.

   (c) $f(x,y) = \cos(xy)$ em $(\pi/2, 0)$ na direcção de $(1,0)$.

   (d) $f(x,y) = xy$ em $(1,1)$ na direcção de $(1,1)$.

   (e) $f(x,y) = x\sin(xy)$ em $(\pi, 0)$ na direcção de $(1,-1)$.

2. Relativamente a cada uma das funções e pontos do exercício anterior, determine agora a direcção (e sentido) de maior crescimento da função f no ponto indicado. Determine também a respectiva taxa de crescimento.

3. Em cada uma das alíneas seguintes, esboce as curvas de nível da superfície $z = f(x,y)$ para os níveis k indicados:

   (a) $z = x^2 + y^2$, $k = 1, 4, 9, 16$. (b) $z = y - x^2$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

   (c) $z = xy$, $k = -2, -1, 0, 1, 2$. (d) $z = (x-y)^2$, $k = 1, 4, 9, 16$.

4. Em cada uma das alíneas seguintes, determine o gradiente da função $f(x,y)$ na expressão $f(x,y) = k$. Mostre depois que, relativamente ao ponto dado, tal gradiente é perpendicular à tangente à curva de nível $f(x,y) = k$.

   (a) $y - x^3 - x = 0$ em $(1,2)$. (b) $x^2 + y = 2$ em $(1,1)$.

   (c) $x - y = 1$ em $(2,1)$. (d) $xy = 1$ em $(1,1)$.

   (d) $x\sin(xy) = 0$ em $(1,\pi)$. (e) $2e^x + ye^x - y^2 = 0$ em $(0,2)$.