Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2006/07**

Folha 12: *Integrais triplos*

---

1. Calcule os integrais triplos das seguintes funções $f(x,y,z)$ nas regiões R indicadas:
   (a) $f(x,y,z) = z$, onde R é o tetraedro delimitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.
   (b) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + z^2}$, onde R é a região delimitada pelo parabolóide $y = x^2 + z^2$ e pelo plano $y = 4$.
   (c) $f(x,y,z) = 6xy$, onde R é a região abaixo do plano $z = 1 + x + y$ e acima da região do plano xoy limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 1$.

2. Em cada uma das alíneas seguintes, determine o volume do sólido compreendido entre os gráficos das funções dadas sobre as regiões limitadas pelas curvas dadas:
   (a) $f(x,y) = x + 2,\ g(x,y) = 0; \quad x = 1,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 3.$
   (b) $f(x,y) = xy,\ g(x,y) = 0; \quad y = 0,\ y = 1,\ x = y,\ x = 1.$
   (c) $f(x,y) = x + y,\ g(x,y) = x^2 + y^2; \quad x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1.$

3. Determine a massa do sólido de densidade μ compreendido entre os gráficos das funções dadas sobre as regiões limitadas pelas curvas dadas:
   (a) $f(x,y) = xy,\ g(x,y) = 0; \quad x = 0, x = 1, y = 0, y = 1; \quad \mu(x,y,z) = 2\,\mathrm{Kg/cm^3}$.
   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2,\ g(x,y) = 0; \quad y = 0, y = 1, x = y, x = 1; \quad \mu(x,y,z) = 2x\,\mathrm{Kg/cm^3}$.
   (c) $f(x,y) = x + y,\ g(x,y) = x^2 + y^2; \quad x = 0, x = 1, y = 0, y = 1; \quad \mu(x,y,z) = 2y\,\mathrm{Kg/cm^3}$.

4. Calcule os seguintes integrais iterados usando coordenadas cilíndricas:
   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{2} z\,dz\,dy\,dx.$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{1} (\sqrt{x^2+y^2} + z)\,dz\,dy\,dx.$
   (c) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\int_{0}^{|x|+1} \frac{1}{|x|+1}\,dz\,dy\,dx.$ (d) $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{x^2+y^2} (z+1)^2\,dz\,dy\,dx.$

5. Calcule os seguintes integrais iterados usando coordenadas esféricas:
   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{dz\,dy\,dx}{x^2+y^2+z^2}.$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{x\,dz\,dy\,dx}{x^2+y^2+z^2}.$
   (c) $\displaystyle\int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \frac{dz\,dy\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}.$ (d) $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx.$

6. Identifique os sólidos e determine os respectivos volumes:
   (a) $\rho \in [0,1]$, $\varphi \in [0,\pi/4]$, $\theta \in [0,2\pi]$. (b) entre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = z^2$.