Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2006/07**

exame de recurso Duração: 2h30

- **Este enunciado consta de duas partes e termina com a palavra FIM, a que se segue um formulário e a cotação. A soma das cotações das questões da primeira parte é 15 valores, mas o máximo que um aluno poderá ter com a resolução de questões dessa parte é 12 valores. Para conseguir ter mais do que 12 valores, o aluno deverá responder também às questões da segunda parte, a qual está cotada para 8 valores. Em suma, designando por c_1 a cotação que o aluno obtiver na primeira parte e por c_2 a cotação que obtiver na segunda parte, a sua cotação final será obtida através da expressão $\min\{c_1, 12\} + c_2$.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.**

Parte 1

1. Considere a seguinte parametrização de uma curva C: $\vec{r}(t) = (t^2, t^3)$, $t \in [-1, 1]$.

   (a) Determine a equação cartesiana de C, nas variáveis x e y, esboce a curva e indique a orientação definida pela parametrização, caso se encontre bem definida.

   (b) Determine o vector velocidade de $\vec{r}(t)$ para $t = \frac{1}{2}$ e esboce-o colocando a origem na extremidade de $\vec{r}(\frac{1}{2})$.

2. Considere a função dada pela expressão $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$.

   (a) Determine o domínio de definição D_f de f, esboce-o e diga se é aberto, fechado, limitado ou conexo (ou várias destas coisas).

   (b) Calcule f_x e f_y (e indique os respectivos domínios de validade).

   (c) Determine, caso existam, o máximo e o mínimo absolutos de f em $D_f \cap [0, 1]^2$ e os pontos onde eles ocorrem.

3. Considere o seguinte integral iterado:

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} x^2 - y^2 \; dx\, dy.$$

   (a) Esboce a região R de integração do correspondente integral duplo.

   (b) Calcule tal integral duplo usando coordenadas polares.

4. Seja F o campo vectorial dado por $F(x, y) = (y^2, -x^2)$, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Diga, justificando, se F é ou não um campo conservativo e, em caso afirmativo, determine um seu potencial.

   (b) Calcule o trabalho realizado por F sobre um objecto percorrendo a curva C dada pela parametrização do exercício 1.

Parte 2

5. (a) Faça um esboço do sólido $Q := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq 4-x^2-y^2\}$.

   (b) Calcule o fluxo do campo vectorial $F(x,y,z) = (x,z,y)$ através da superfície constituída pela fronteira ∂Q do sólido Q da alínea anterior, supondo esta superfície orientada de modo a que os vectores normais apontem para o exterior de Q.

6. Seja $f : \mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em (x_0, y_0), ponto interior de $\mathrm{dom}(f)$. Seja $\vec{r} = (r_1, r_2) : \mathrm{dom}(\vec{r}) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ diferenciável em t_0, ponto interior de $\mathrm{dom}(\vec{r})$, com $\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0)$. Suponha que $f \circ \vec{r}$ faz sentido. Prove a regra de derivação das funções compostas para $\dfrac{d(f \circ \vec{r})}{dt}(t_0)$.

FIM

Formulário

(apenas simbologia sumária é apresentada, de acordo com a notação usual ou a convencionada nas aulas; nada é referido sobre as hipóteses que validam as fórmulas)

trigonometria: $\cos^2 z = \dfrac{1+\cos(2z)}{2}$; $\sin^2 z = \dfrac{1-\cos(2z)}{2}$

coordenadas esféricas: $x = \rho\cos\theta\sin\varphi$; $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$; $z = \rho\cos\varphi$

integração simples (partes; substituição): $\displaystyle\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$; $\displaystyle\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = \int_a^b (f\circ\phi)\,\phi'$

integração de linha (fórmula fundamental): $\displaystyle\int_C \nabla U \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A)$

T. Green: $\displaystyle\oint_{\partial R} M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy$

T. divergência: $\displaystyle\iint_{\partial R} F \cdot d\vec{S} = \iiint_R (M_x + N_y + P_z)\,dxdydz$

T. Stokes: $\displaystyle\iint_S \nabla \times F \cdot d\vec{S} = \int_C F \cdot \vec{\rho}$, onde $\nabla \times F = \mathrm{rot} F$

Cotação:

1.(a) 2; (b) 1; 2.(a) 1,5; (b) 1; (c) 2,5 3.(a) 1,5; (b) 2,5; 4.(a) 1; (b) 2; 5.(a) 1; (b) 3; 6. 4