Proposta de teste de avaliação

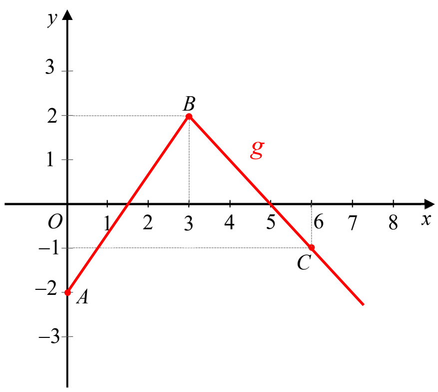
Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:** MARÇO 2023

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Observe a figura, onde se encontra representada em referencial xOy parte do gráfico de uma função g de domínio $\mathbb{R}$.



A parte do gráfico representada é formada pelo segmento de reta $[AB]$ e pela semirreta $\dot{B}C$, sendo A, B e C os pontos de coordenadas $(0,-2)$, $(3,2)$ e $(6,-1)$, respetivamente.

1.1. Complete o gráfico da função, sabendo que se trata de uma função par.

1.2. Determine os zeros de g.

1.3. Indique os valores de x para os quais $g(x)<0$.

1.4. Indique os intervalos onde a função g é positiva e decrescente.

1.5. Indique uma restrição de g que seja injetiva.

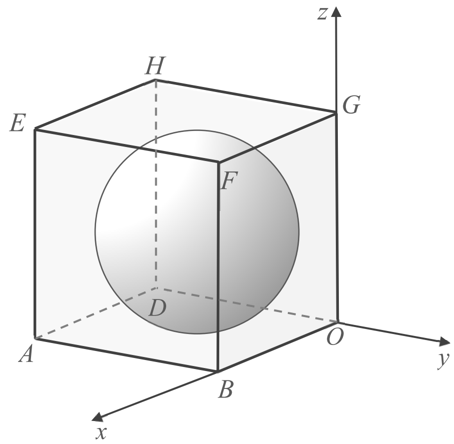
2. Seja f uma função ímpar de domínio $[-5, 5]$. Então, $f(-3)+f(0)+f(3)$ tem o valor:

(A) 0 **(B)** -3 **(C)** 3 **(D)** $2f(3)$

3. Considere, num referencial ortonormado $Oxyz$, a esfera tangente a todas as faces do cubo [*ABODEFGH*] e definida por:

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z+2\leq 0$$

Os vértices *B* e *G* do cubo pertencem aos semieixos positivos Ox e Oz, respetivamente, e o vértice *D* pertence ao semieixo negativo Oy.



3.1. Escreva uma condição que represente:

a) a reta paralela a *AE* que passa pelo ponto $(2,1,3)$;

b) o plano paralelo a xOz que passa no centro da esfera.

3.2. Determine, com aproximação às centésimas, o volume da parte do cubo que não é ocupado pela esfera.

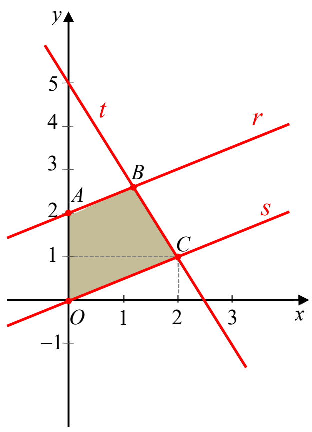
3.3. Determine o comprimento do segmento de reta [*PH*], em que *P* é o centro da face [*BOGF*].

3.4. Suponha que o cubo sofre uma rotação de $180°$ em torno do eixo *Oz*.
Indique as coordenadas dos transformados dos vértices *A*, *E* e *H*, nessa rotação.

4. No referencial xOy da figura estão representadas as retas r, s e t.

Sabe-se que:

- o ponto *C* tem coordenadas $(2,1)$;
- a reta s passa em O e em C;
- a reta r é paralela à reta s e tem ordenada na origem igual a 2;
- a reta t passa no ponto C e tem ordenada na origem igual a 5.



A área do quadrilátero [*ABCO*] é:

(A) 1,3 **(B)** 1,8

(C) 3,2 **(D)** 5,0

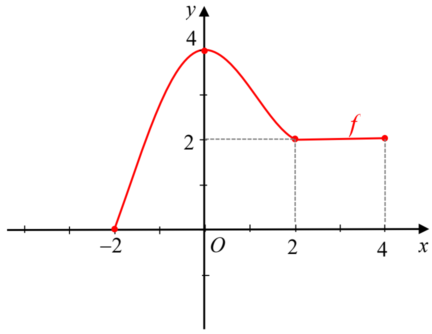
5. De uma função f sabe-se que tem domínio $[-2, 6]$ e contradomínio $[-4, 1]$.

Indique o domínio e contradomínio das seguintes funções:

5.1. $g(x) = 5f(2x)$

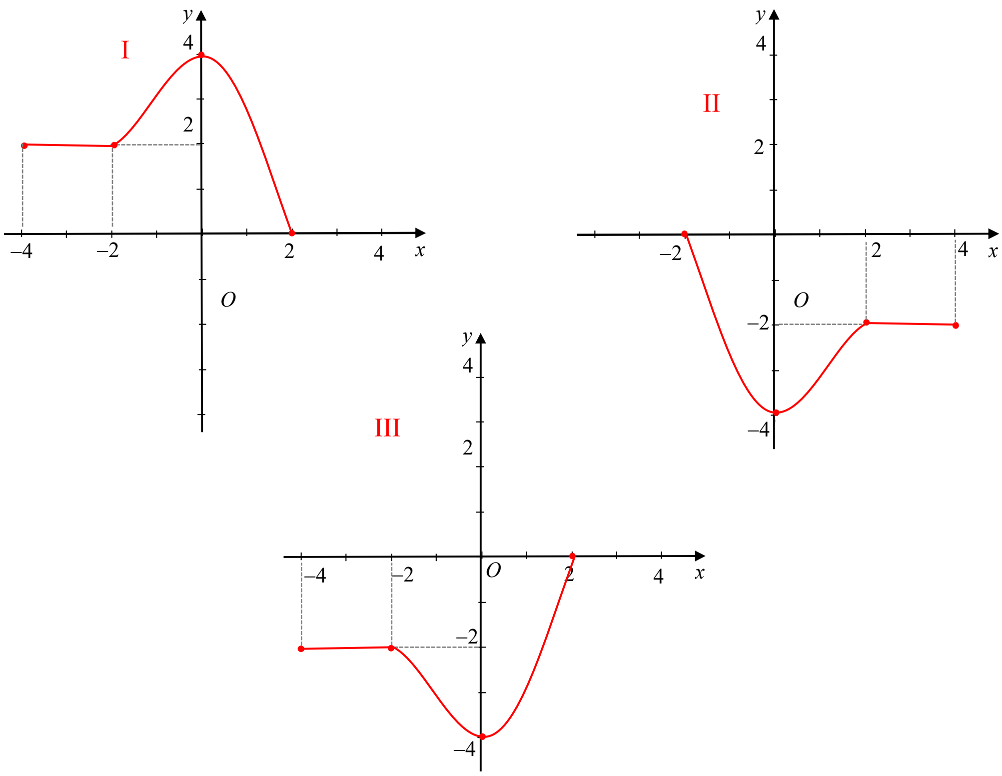
5.2. $h(x) = 3 - f(x+1)$

6. Ao lado está uma representação gráfica da função f de domínio $[-2, 4]$ e contradomínio $[0, 4]$.



6.1. Estabeleça uma correspondência entre os gráficos I, II e III e as expressões analíticas:

$h(x) = -f(x)$; $g(x) = f(-x)$ e $m(x) = -f(-x)$.



6.2. Indique os extremos, os maximizantes e os minimizantes de f.

FIM

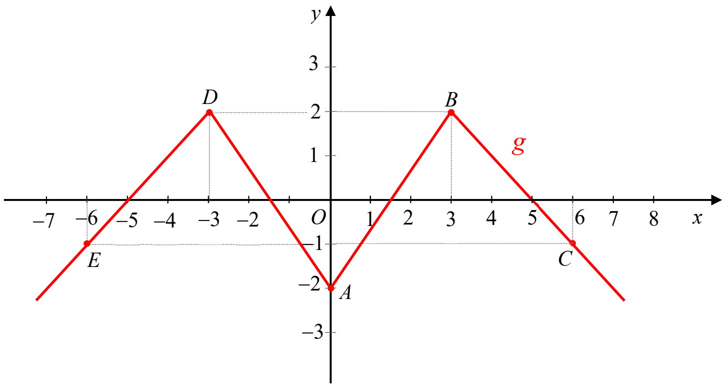
Cotações:

Item															
Cotação (em pontos)															
1.1.	**1.2.**	**1.3.**	**1.4.**	**1.5.**	**2.**	**3.1.a)**	**3.1.b)**	**3.2.**	**3.3.**	**3.4.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.1.**	**6.2.**	**Total**
10	12	10	12	12	10	12	12	18	15	15	10	12	12	12	16	**200**

Proposta de resolução

1.

1.1. Uma vez que a função g é par, objetos simétricos têm a mesma imagem. Então para obter o restante gráfico basta fazer uma reflexão de eixo Oy obtendo:



1.2. Zeros de g em $\mathbb{R}_0^+$

$A(0,-2)$, $B(3,2)$, $C(6,-1)$

Reta AB: $y = mx + b$

$$m_{AB} = \frac{-2-2}{0-3} \Leftrightarrow m_{AB} = \frac{4}{3} \text{ e } b = -2$$

$$y = \frac{4}{3}x - 2$$

$$g(x) = 0 \wedge x \in [0,3] \Leftrightarrow \frac{4}{3}x - 2 = 0 \Leftrightarrow 4x = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Reta BC: $y = mx + b$

$$m_{BC} = \frac{-1-2}{6-3} \Leftrightarrow m_{BC} = -1$$

$$y - 2 = -1(x-3) \Leftrightarrow y = -x + 5$$

$$g(x) = 0 \wedge x > 3 \Leftrightarrow -x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Os zeros de g em $\mathbb{R}_0^+$ são $\frac{3}{2}$ e 5. Logo, dado que g é uma função par, podemos concluir que os zeros de g são: -5, $-\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$ e 5

1.3. $g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -5[\cup \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[\cup]5, +\infty[$

1.4. g é positiva e decrescente em $\left[-3,-\frac{3}{2}\right[$ e em $[3,5[$.

1.5. Por exemplo, a restrição $g|_{[3,+\infty[}$ é injetiva.

2. Se f é ímpar e 0 é um elemento do domínio então, $f(0)=0$ e, como objetos simétricos têm imagens simétricas, $f(-3)=-f(3)$.

Então, $f(-3)+f(0)+f(3)=-f(3)+f(0)+f(3)=0$.

Resposta: (A)

3. **3.1.**

a) A reta AE é paralela ao eixo Oz então a reta que pretendemos definir também o é:

$(x,y,z)=(2,1,3)+k(0,0,1),\ k\in\mathbb{R}$

b) $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z+2\leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x)+(y^2+2y)+(z^2-2z)+2\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)+(y^2+2y+1)+(z^2-2z+1)\leq 3-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2\leq 1$$

Centro da esfera: $C(1,\ -1,\ 1)$

Se o plano é paralelo a xOz e passa em C então é definido pela equação $y=-1$.

3.2. Se a esfera tem raio 1, então o cubo tem duas unidades de aresta.

Volume do cubo: $2^3=8$

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi\times 1^3=\frac{4}{3}\pi$

Volume da parte do cubo não ocupada pela esfera: $8-\frac{4}{3}\pi\approx 3{,}81$

3.3. Centro da face $[BCGF]$: $P(1,\ 0,\ 1)$

Ponto $H(0,-2,2)$

$\overrightarrow{PH}=(0,\ -2,\ 2)-(1,\ 0,\ 1)\Leftrightarrow \overrightarrow{PH}=(-1,\ -2,\ 1)$

$\overline{PH}=\|\overrightarrow{PH}\|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}$

3.4. $A(2,-2,0)\rightarrow A'(-2,\ 2,\ 0)$

$E(2,\ -2,\ 2)\rightarrow E'(-2,\ 2,\ 2)$

$H(0,\ -2,\ 2)\rightarrow H'(0,2,2)$

4.

4.1. Para calcular a área do quadrilátero [$ABCO$], à área definida pelos semieixos positivos do referencial e pela reta t vamos retirar as áreas dos triângulos não sombreados do interior desse triângulo.

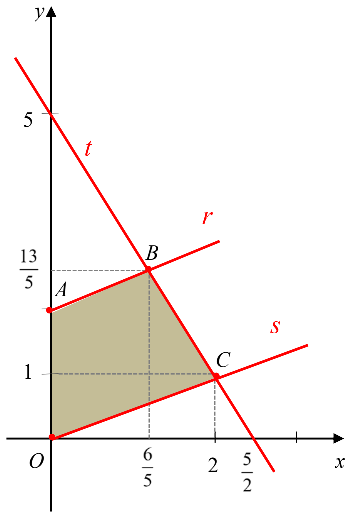
Reta t:

Passa pelos pontos de coordenadas $(2, 1)$ e $(0, 5)$

$$m_t = \frac{1-5}{2-0} = -2$$

$$t: y = -2x + 5$$

Interseção com Ox: $0 = -2x + 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$



Área do triângulo definido pela reta t e os semieixos positivos Ox e Oy: $\dfrac{\frac{5}{2}\times 5}{2} = \dfrac{25}{4}$

Reta s:

$$m_s = \frac{1}{2}$$

$$s: y = \frac{1}{2}x$$

Área do triângulo definido pelo semieixo positivos Ox e pelas retas s e t: $\dfrac{\frac{5}{2}\times 1}{2} = \dfrac{5}{4}$

Reta r: $r \parallel s$

$$r: y = \frac{1}{2}x + 2$$

Ponto B (interseção das retas r e t)

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ \frac{1}{2}x + 2 = -2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ x + 4 = -4x + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ 5x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{13}{5} \\ x = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Altura do triângulo definido pelas retas r e t e pelo semieixo positivo Oy é a abcissa de B.

Área deste triângulo: $\dfrac{3\times\frac{6}{5}}{2} = \dfrac{9}{5}$

Área do quadrilátero [$ABCO$]:

$$A = \frac{25}{4} - \frac{5}{4} - \frac{9}{5} = 3{,}2$$

Resposta: (C)

5. $D_f = [-2\,,\,6]$; $D'_f = [-4,\,1]$.

5.1. O gráfico da função *g* obtém-se do gráfico da função f por uma contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$ - que transforma $D_f = [-2,\,6]$ em $D_g = [-1,\,3]$ - seguida de uma dilatação vertical de coeficiente 5 que transforma $D'_f = [-4,\,1]$ em $D'_g = [-20,\,5]$.

5.2. O gráfico da função *g* obtém-se do gráfico da função f por uma translação horizontal associada ao vetor $(-1,\,0)$ - que transforma $D_f = [-2, 6]$ em $D_g = [-3, 5]$ - seguida de uma reflexão de eixo Ox e de uma translação vertical associada ao vetor $(0, 3)$ que transforma sucessivamente $D'_f = [-4, 1]$ em $[-1,\,4]$ e em $D'_g = [2,\,7]$.

6.

6.1. Gráfico I $\to$ $g(x)$

Gráfico II $\to$ $h(x)$

Gráfico III $\to$ $m(x)$

6.2.

Máximos relativos:	4 com maximizante 0
	2 com maximizantes $]2,4]$
Mínimos relativos:	0 com minimizante -2
	2 com minimizantes $[2,4]$

0 é mínimo absoluto e 4 é máximo absoluto.