MATEMÁTICA A
10.º ANO

MATILDE ALMEIDA
DIANA BARROCA
FILIPE GALEGO
JOÃO MARQUES
JOÃO TERROSO
SANDRA TEIXEIRA

Ano letivo 2023/2024

Duração do Teste: 100 minutos

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Não é permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do teste.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, apresente sempre o valor exato.

MATILDE ALMEIDA
DIANA BARROCA
FILIPE GALEGO
JOÃO MARQUES
JOÃO TERROSO
SANDRA TEIXEIRA

1. Qual dos seguintes é o conjunto-solução da equação $2\sqrt{3} - 5\sqrt{7} = \sqrt{7}x$?

(A) $\{2\sqrt{3} - 7\}$

(B) $\left\{\frac{2\sqrt{21}-35}{7}\right\}$

(C) $\{2\sqrt{21} - 7\}$

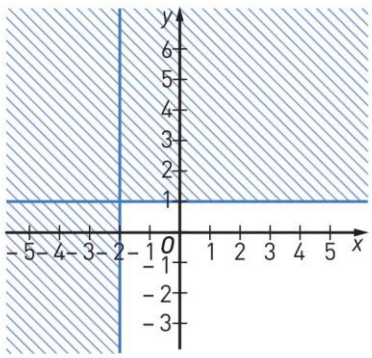
(D) $\{2\sqrt{7} - 21\}$

2. A expressão $(2a^6b^8)^{-\frac{1}{4}} \times \sqrt[4]{8a^{-2}}$ é igual, para quaisquer números reais positivos a e b, a:

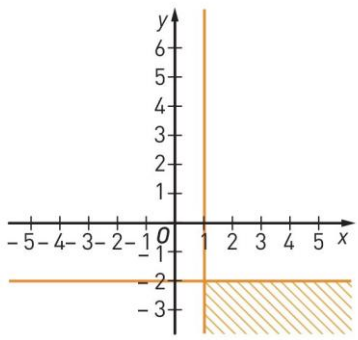
(A) $\sqrt{2}ab$ **(B)** $2ab$ **(C)** $-\frac{\sqrt{2}}{a^2b^2}$ **(D)** $\frac{\sqrt{2}}{a^2b^2}$

3. Num referencial o.n. xOy, qual dos seguintes semiplanos representa a condição $\sim(x > -2 \wedge y < 1)$?

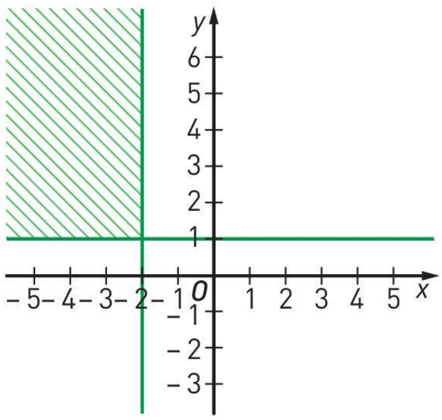
(A)



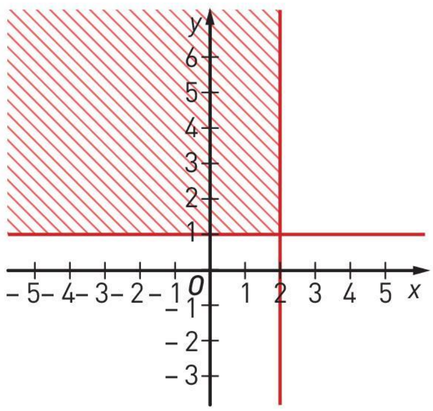
(C)



(B)



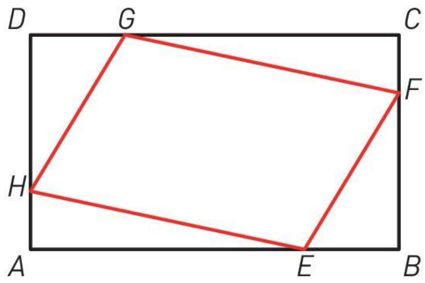
(D)



MATILDE ALMEIDA
DIANA BARROCA
FILIPE GALEGO
JOÃO MARQUES
JOÃO TERROSO
SANDRA TEIXEIRA

4. Na figura, está representado um retângulo $[ABCD]$.
Sabe-se que:

- $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{HD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$



4.1. Mostre que o quadrilátero $[EFGH]$ é um paralelogramo.

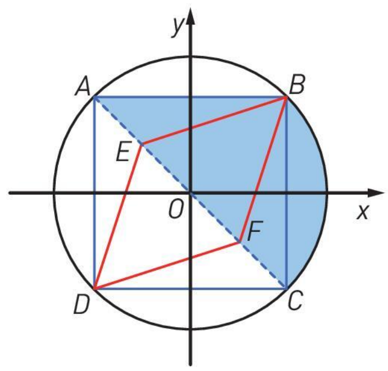
4.2. Considere o vetor $2\left(\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{EB}\right) + \overrightarrow{GH}$. Indique a opção com um representante do mesmo vetor.

(A) $\vec{0}$ **(B)** $\overrightarrow{EF}$ **(C)** $\overrightarrow{HG}$ **(D)** $\overrightarrow{DB}$

5. No referencial cartesiano o.n. Oxy da figura está representada uma circunferência de centro na origem O do referencial e de raio $3\sqrt{2}$.

Nessa circunferência, foi inscrito o quadrado $[ABCD]$ e, a partir desse quadrado, foi construído o losango $[BEDF]$, de tal modo que:

- E é o ponto médio de $[AO]$;
- F é o ponto médio de $[OC]$;
- a reta AB é paralela ao eixo Ox.



5.1. Mostre que o vértice A do quadrado $[ABCD]$ tem coordenadas $(-3, 3)$.

5.2. Determine a razão entre a área do quadrado $[ABCD]$ e a área do losango $[BEDF]$ e interprete o resultado no contexto do problema.

5.3. Escreva uma condição que defina a região representada a sombreado.

5.4. Calcule o valor exato da área delimitada pelo arco AB e pelo segmento de reta $[AB]$.

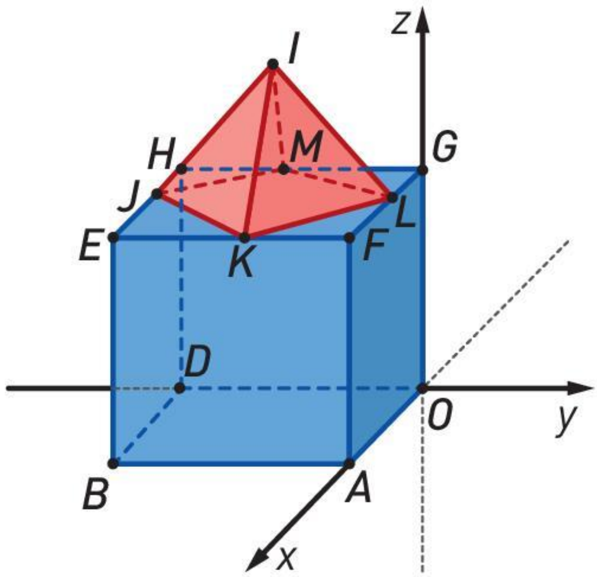
6. Seja $P(k-2, -2k+3), k \in \mathbb{R}$, um ponto do plano.

Quais são os valores de k para os quais P pertence ao quarto quadrante?

(A) $\left]\frac{3}{2}, 2\right[$ **(B)** $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$ **(C)** $]2, +\infty[$ **(D)** $]-1, 2[$

7. Considere a representação do cubo $[OABDEFGH]$ e da pirâmide quadrangular regular $[IJKLM]$ num referencial ortogonal e monométrico $Oxyz$.
Sabe-se que:

- os pontos A, D e G pertencem aos eixos Ox, Oy e Oz, respetivamente;
- a aresta do cubo mede 8;
- os pontos K, L, M e J são os pontos médios dos segmentos de reta $[EF], [FG], [GH]$ e $[HE]$, respetivamente;
- o volume da pirâmide é 16.



7.1. Indique as coordenadas dos pontos A, D e E.

7.2. Defina, através de uma condição:
7.2.1. o plano ABE;
7.2.2. a reta EH;
7.2.3. o plano AGH.

7.3. A equação $x^2 + y^2 + z^2 + 8y - 16z + 55 = 0$ é uma equação da superfície esférica que tem centro num dos pontos da figura. Indique que ponto é o centro e qual é o raio da superfície esférica.

7.4. Determine as coordenadas do vértice I da pirâmide.

FIM

COTAÇÕES

Questão	1.	2.	3.	4.1.	4.2.	5.1.	5.2.	5.3.	Total
Domínio	CP	CP	CP	RC/RP	CP	RC/RP	CM	CP	
Cotação	10	10	10	15	10	15	20	15	
Questão	5.4.	6.	7.1.	7.2.1.	7.2.2.	7.2.3.	7.3.	7.4.	
Domínio	RC/RP	CP	RC/RP	CP	CP	CP	RC/RP	CM	
Cotação	11	10	9	10	10	15	10	20	200

CP – Cálculo e procedimentos
CM – Comunicação matemática
RC/RP – Raciocínio matemático/Resolução de problemas

Proposta de resolução

1. $2\sqrt{3}-5\sqrt{7}=\sqrt{7}x \Leftrightarrow \sqrt{7}x=2\sqrt{3}-5\sqrt{7} \Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{3}-5\sqrt{7}}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{21}-35}{7}$

Resposta: (B)

2. $(2a^6b^8)^{-\frac{1}{4}}\times\sqrt[4]{8a^{-2}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2a^6b^8}}\times\sqrt[4]{\frac{8}{a^2}}=\sqrt[4]{\frac{8}{2a^8b^8}}=\sqrt[4]{\frac{4}{a^8b^8}}=\frac{\sqrt[4]{2^2}}{\sqrt[4]{a^8b^8}}=\frac{\sqrt{2}}{a^2b^2}$

Resposta: (D)

3. $\sim(x>-2\wedge y<1)\Leftrightarrow\sim(x>-2)\vee\sim(y<1)\Leftrightarrow x\leq-2\vee y\geq1$

Resposta: (A)

4.

4.1. O quadrilátero $[EFGH]$ é um paralelogramo se e só se $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$.
Ora, $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{HG}$ como queríamos mostrar.
Logo, o quadrilátero $[EFGH]$ é um paralelogramo

4.2. $2\left(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{EB}\right)+\overrightarrow{GH}=2\left(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DG}\right)+\overrightarrow{GH}=2\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GH}=2\overrightarrow{HG}-\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{HG}$

Resposta: (C)

5.

5.1. $[AC]$ é o diâmetro da circunferência. Logo, $\overline{AC}=2\times3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$.
Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[ABC]$, vem

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2\Leftrightarrow2\overline{AB}^2=\left(6\sqrt{2}\right)^2\Leftrightarrow2\overline{AB}^2=72\Leftrightarrow\overline{AB}^2=36$

Como $\overline{AB}>0$, vem que $\overline{AB}=6$.
Seja A' o ponto de interseção do segmento de reta $[AB]$ com o eixo Oy. Então, $\overline{AA'}=6:2=3$.
Assim, a abcissa do ponto A é -3.
Como A é um ponto da bissetriz dos quadrantes pares, as coordenadas do ponto A são $(-3,3)$.

5.2. Pela alínea anterior, sabemos que $A_{[ABCD]}=36$.

$\overline{AE}=\overline{EO}=\overline{OF}=\overline{FC}=\frac{1}{4}\overline{AC}$ e $\overline{AC}=\overline{BD}=6\sqrt{2}$

$\overline{EF}=2\overline{EO}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

$A_{[BFDE]}=\frac{\overline{BD}\times\overline{EF}}{2}\Leftrightarrow A_{[BFDE]}=\frac{6\sqrt{2}\times3\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow A_{[BFDE]}=18$

$\frac{A_{[ABCD]}}{A_{[BFDE]}}=\frac{36}{18}=2$

Resposta: $\frac{A_{[ABCD]}}{A_{[BFDE]}}=2$. A área do quadrado é o dobro da área do losango.

5.3. $y>-x\wedge y\leq3\wedge x^2+y^2\leq18$

5.4. $A = \frac{1}{4}\left(A_{círculo} - A_{[ABCD]}\right) = \frac{1}{4} \times \left(\pi \times \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 36\right) = \frac{1}{4} \times (18\pi - 36) = \frac{18\pi - 36}{4} = \frac{9\pi - 18}{2}$

Resposta: $A = \frac{9\pi - 18}{2}$

6. $P(k-2, -2k+3), k \in \mathbb{R}$

Se ponto P pertence ao 4.º quadrante, então a sua abcissa é positiva e a sua ordenada é negativa.

Assim, $k - 2 > 0 \wedge -2k + 3 < 0 \Leftrightarrow k > 2 \wedge k > \frac{3}{2} \Leftrightarrow k > 2$

Resposta: (C)

7.

7.1. $A(8{,}0{,}0)$; $D(0,-8{,}0)$; $E(8,-8{,}8)$

7.2.1. $ABE: x = 8$

7.2.2. $EH: y = -8 \wedge z = 8$

7.2.3. O plano AGH é o plano mediador do segmento de reta $[OF]$.

Então, $d(P,O) = d(P,F)$, sendo $P(x,y,z)$ um ponto qualquer desse plano mediador.

$O(0,0,0)$ e $F(8,0,8)$

Assim,

$x^2 + y^2 + z^2 = (x-8)^2 + y^2 + (z-8)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = x^2 - 16x + 64 + y^2 + z^2 - 16z + 64 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16x + 16z - 128 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + z - 8 = 0$

7.3. $x^2 + y^2 + z^2 + 8y - 16z + 55 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8y + z^2 - 16z = -55 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8y + 16 + z^2 - 16z + 64 = -55 + 16 + 64 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + (y+4)^2 + (z-8)^2 = 25$

Resposta: O centro da circunferência é $M(0,-4{,}8)$ e o raio é 5.

7.4. Sabe-se que:

$\overline{KL} = \overline{LM} = \overline{MJ} = \overline{JK}$

Considerando o triângulo retângulo $[KFL]$, temos que

$\overline{KL}^2 = \overline{KF}^2 + \overline{FL}^2 \Leftrightarrow \overline{KL}^2 = 4^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{KL}^2 = 32$

Logo, $A_{[KLMJ]} = 32$.

Seja I' a projeção ortogonal de I no plano EFG.

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3}A_{[KLMJ]} \times \overline{II'} \Leftrightarrow 16 = \frac{1}{3} \times 32 \times \overline{II'} \Leftrightarrow \overline{II'} = \frac{3}{2}$

A cota do ponto I é $8 + \frac{3}{2} = \frac{19}{2}$

Resposta: As coordenadas do ponto I são $\left(4, -4, \frac{19}{2}\right)$