MATEMÁTICA A

10.º ano

Alexandra Conceição | Matilde Almeida | Diana Barroca
Filipe Galego | João Carlos Terroso | Sandra Teixeira

Ano letivo 2020/2021

Duração do Teste: 90 minutos

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Não é permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do Teste.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Qual dos seguintes é o conjunto-solução da equação $2\sqrt{3} - 5\sqrt{7} = \sqrt{7}x$?

(A) $\{2\sqrt{3} - 7\}$ **(C)** $\{2\sqrt{21} - 7\}$

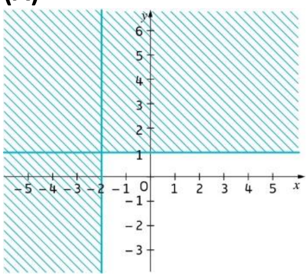
(B) $\left\{\frac{2\sqrt{21}-5}{7}\right\}$ **(D)** $\{2\sqrt{7} - 21\}$

2. A expressão $(2a^6b^8)^{-\frac{1}{4}} \times \sqrt[4]{8a^{-2}}$ é igual, para quaisquer números reais positivos a e b, a:

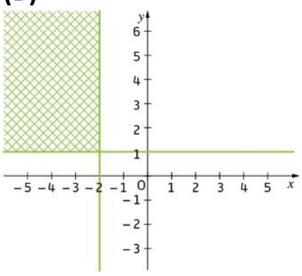
(A) $\sqrt{2}ab$ **(B)** $2ab$ **(C)** $-\frac{\sqrt{2}}{a^2b^2}$ **(D)** $\frac{\sqrt{2}}{a^2b^2}$

3. Num referencial o.n. xOy, qual dos seguintes semiplanos representa a condição $\sim(x > -2 \wedge y < 1)$?

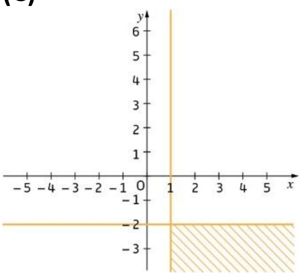
(A)



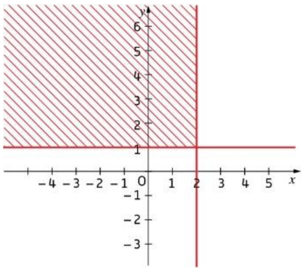
(B)



(C)

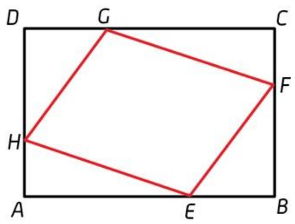


(D)



4. Na figura, está representado um retângulo $[ABCD]$.
Sabe-se que:

- $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{HD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$



4.1. Mostre que o quadrilátero $[EFGH]$ é um paralelogramo.

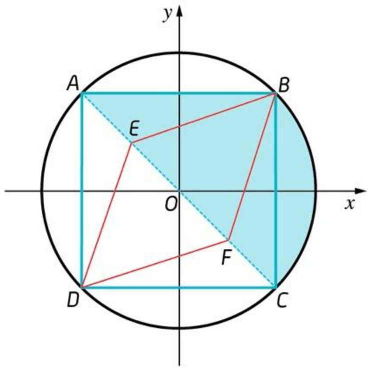
4.2. Indique a opção com um vetor igual a $2\left(\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{EB}\right) + \overrightarrow{GH}$.

(A) $\vec{0}$ **(B)** $\overrightarrow{EF}$ **(C)** $\overrightarrow{HG}$ **(D)** $\overrightarrow{DB}$

5. No referencial cartesiano o.n. Oxy da figura está representada uma circunferência de centro na origem O do referencial e de raio $3\sqrt{2}$.

Nessa circunferência, foi inscrito o quadrado $[ABCD]$ e, a partir desse quadrado, foi construído o losango $[BEDF]$, de tal modo que:

- E é o ponto médio de $[AO]$;
- F é o ponto médio de $[OC]$;
- a reta AB é paralela ao eixo Ox.



5.1. Mostre que o vértice A do quadrado $[ABCD]$ tem coordenadas $(-3, 3)$.

5.2. Determine a razão entre a área do quadrado $[ABCD]$ e a área do losango $[BEDF]$ e interprete o resultado no contexto do problema.

5.3. Escreva uma condição que defina a região representada a sombreado, incluindo a fronteira.

5.4. Calcule o valor exato da área delimitada pelo arco AB e pelo segmento de reta $[AB]$.

5.5. Seja $P(k-2, -2k+3), k \in \mathbb{R}$, outro ponto do plano.

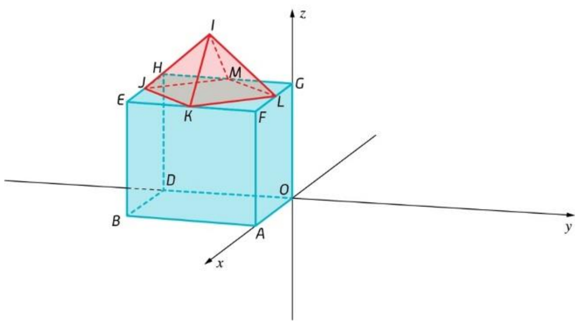
Quais são os valores de k para os quais P pertence ao quarto quadrante?

(A) $\left]\frac{3}{2}, 2\right[$ **(B)** $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$ **(C)** $]2, +\infty[$ **(D)** $]-1, 2[$

6. Considera a representação do cubo $[OABDEFGH]$ e da pirâmide quadrangular regular $[IJKLM]$ num referencial ortogonal e monométrico $Oxyz$.

Sabe-se que:

- a aresta do cubo mede 8;
- os pontos K, L, M e J são os pontos médios dos segmentos de reta $[EF], [FG], [GH]$ e $[HE]$, respetivamente;
- o volume da pirâmide é 16.



6.1. Indique as coordenadas dos pontos A, D e E.

6.2. Defina, através de uma condição:

6.2.1. o plano ABE;

6.2.2. a reta EH;

6.2.3. o plano AGH.

6.3. A equação $x^2 + y^2 + z^2 + 8y - 16z + 55 = 0$ é uma equação da superfície esférica que tem centro num dos pontos da figura. Indique que ponto é o centro e qual é o raio da superfície esférica.

6.4. Determine as coordenadas do vértice I da pirâmide.

FIM

COTAÇÕES

Questão	1.	2.	3.	4.1.	4.2.	5.1.	5.2.	5.3.	5.4.	5.5.	6.1.	6.2.1.	6.2.2.	6.2.3.	6.3.	6.4.	Total
Cotação	8	8	8	15	8	20	20	11	15	8	9	10	10	15	15	20	200

Proposta de resolução

1. $2\sqrt{3}-5\sqrt{7}=\sqrt{7}x \Leftrightarrow \sqrt{7}x=2\sqrt{3}-5\sqrt{7} \Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{3}-5\sqrt{7}}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{21}-5}{7}$

Resposta: (B)

2. $(2a^6b^8)^{-\frac{1}{4}} \times \sqrt[4]{8a^{-2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2a^6b^8}} \times \sqrt[4]{\frac{8}{a^2}} = \sqrt[4]{\frac{8}{2a^8b^8}} = \sqrt[4]{\frac{4}{a^8b^8}} = \frac{\sqrt[4]{2^2}}{\sqrt[4]{a^8b^8}} = \frac{\sqrt{2}}{a^2b^2}$

Resposta: (D)

3. $\sim(x>-2 \wedge y<1) \Leftrightarrow \sim(x>-2) \vee \sim(y<1) \Leftrightarrow x \le -2 \vee y \ge 1$

Resposta: (A)

4.

4.1. O quadrilátero $[EFGH]$ é um paralelogramo se e só se $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$.

Ora, $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{HG}$ como queríamos mostrar.

Logo, o quadrilátero $[EFGH]$ é um paralelogramo

4.2. $2\left(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{EB}\right)+\overrightarrow{GH}=2\left(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DG}\right)+\overrightarrow{GH}=2\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GH}=2\overrightarrow{HG}-\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{HG}$

Resposta: (C)

5.

5.1. $[AC]$ é o diâmetro da circunferência. Logo, $\overline{AC}=2\times 3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[ABC]$, vem

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2 \Leftrightarrow 2\overline{AB}^2=\left(6\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2\overline{AB}^2=72 \Leftrightarrow \overline{AB}^2=36$

Como $\overline{AB}>0$, vem que $\overline{AB}=6$.

Seja A' o ponto de interseção do segmento de reta $[AB]$ com o eixo Oy. Então, $\overline{AA'}=6:2=3$.

Como A é um ponto da bissetriz dos quadrantes pares, as coordenadas do ponto A são $(-3,3)$.

5.2. Pela alínea anterior, sabemos que $A_{[ABCD]}=36$.

$\overline{AE}=\overline{EO}=\overline{OF}=\overline{FC}=\frac{1}{4}\overline{AC}$ e $\overline{AC}=\overline{BD}=6\sqrt{2}$

$\overline{EF}=2\overline{EO}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

$A_{[BFDE]}=\frac{\overline{BD}\times\overline{EF}}{2} \Leftrightarrow A_{[BFDE]}=\frac{6\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow A_{[BFDE]}=18$

$\frac{A_{[ABCD]}}{A_{[BFDE]}}=\frac{36}{18}=2$

Resposta: $\frac{A_{[ABCD]}}{A_{[BFDE]}}=2$ e a área do quadrado é o dobro da área do losango.

5.3. $y \geq -x \wedge y \leq 3 \wedge x^2 + y^2 \leq 18$

5.4. $A = \frac{1}{4}\left(A_{círculo} - A_{[ABCD]}\right) = \frac{1}{4} \times \left(\pi \times \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 36\right) = \frac{1}{4} \times 18\pi - 9 = \frac{9\pi - 18}{2}$

Resposta: $A = \frac{9\pi-18}{2}$

5.5. $P(k-2, -2k+3), k \in \mathbb{R}$

Se ponto P pertence ao 4.º quadrante, então a sua abcissa é positiva e a sua ordenada é negativa.

Assim, $k - 2 > 0 \wedge -2k + 3 < 0 \Leftrightarrow k > 2 \wedge k > \frac{3}{2} \Leftrightarrow k > 2$

Resposta: (C)

6.

6.1. $A\ \ (8,0,0)\ ;\ D\ \ (0,-8,0)\ ;\ E\ \ (8,-8,8$

6.2.1. $ABE: x = 8$

6.2.2. $EH: y = -8 \wedge z = 8$

6.2.3. O plano AGH é o plano mediador do segmento de reta $[OF]$.

Então, $d(P, O) = d(P, F)$, sendo $P(x, y, z)$ um ponto desse plano mediador.

$O(0,0,0)$ e $F(8,0,8)$

Assim,

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x-8)^2 + y^2 + (z-8)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = x^2 - 16x + 64 + y^2 + z^2 - 16z + 64 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 16x + 16z - 128 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x + z - 8 = 0$$

6.3. $x^2 + y^2 + z^2 + 8y - 16z + 55 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8y + z^2 - 16z = -55 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8y + 16 + z^2 - 16z + 64 = -55 + 16 + 64 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + (y+4)^2 + (z-8)^2 = 25$$

Resposta: O centro da circunferência é $M(0,-4,8)$ e o raio é 5.

6.4. Sabe-se que:

$\overline{KL} = \overline{LM} = \overline{MJ} = \overline{JK}$

Considerando o triângulo retângulo $[KFL]$, temos que

$\overline{KL}^2 = \overline{KF}^2 + \overline{FL}^2 \Leftrightarrow \overline{KL}^2 = 4^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{KL}^2 = 32$

Logo, $A_{[KLMJ]} = 32$.

Seja I' a projeção ortogonal de I no plano EFG.

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} A_{[KLMJ]} \times \overline{II'} \Leftrightarrow 16 = \frac{1}{3} \times 32 \times \overline{II'} \Leftrightarrow \overline{II'} = \frac{3}{2}$$

A cota do ponto I é $8 + \frac{3}{2} = \frac{19}{2}$

Resposta: As coordenadas do ponto I são $\left(4, -4, \frac{19}{2}\right)$