Teste N.º 4 – Proposta de resolução

1.

1.1 Os pontos A e B são pontos de interseção dos gráficos das funções f e g.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = -2x + 4$

$\Leftrightarrow x^2 = 9$

$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$

$g(-3) = -2 \times (-3) + 4 = 6 + 4 = 10$

$g(3) = -2 \times 3 + 4 = -6 + 4 = -2$

Assim, as coordenadas dos pontos A e B são, respetivamente: $(-3, 10)$ e $(3, -2)$.

As coordenadas do ponto médio de $[AB]$ são $\left(\frac{-3+3}{2}, \frac{10+(-2)}{2}\right) = (0, 4)$.

$\overline{AB} = \sqrt{(-3-3)^2 + \left(10 - (-2)\right)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 12^2} = \sqrt{36 + 144} = \sqrt{180} = 2\sqrt{45}$

Desta forma, a circunferência de diâmetro $[AB]$ tem centro de coordenadas $(0, 4)$ e o seu raio mede $\frac{2\sqrt{45}}{2} = \sqrt{45}$, pelo que a sua equação reduzida é:

$(x - 0)^2 + (y - 4)^2 = \left(\sqrt{45}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + (y - 4)^2 = 45$

1.2 Uma vez que D é um ponto do gráfico de g cuja ordenada é simétrica da sua abcissa, então:

$g(x) = -x \Leftrightarrow -2x + 4 = -x \Leftrightarrow x = 4$

Assim, as coordenadas de D são $(4, -4)$.

C é o vértice da parábola que representa graficamente a função f, pelo que as suas coordenadas são $\left(\frac{-(-2)}{2\times1}, f\left(\frac{-(-2)}{2\times1}\right)\right) = \left(1, f(1)\right) = (1, -6)$.

$\overrightarrow{CD} = D - C = (4, -4) - (1, -6) = (3, 2)$

Desta forma, uma equação vetorial da reta CD é $(x, y) = (1, -6) + k(3, 2), k \in \mathbb{R}$.

2.

2.1 **Opção (A)**

O ponto de coordenadas $(0, 0, 12)$ pertence à reta paralela ao eixo Oy que contém o ponto G, e um vetor diretor desta reta é o vetor de coordenadas $(0, 1, 0)$.

2.2 De acordo com a informação dada no enunciado, podemos concluir que as coordenadas do ponto F são $(0, 4, 0)$.

Como $\overline{OA} = \frac{3}{4}\overline{OF}$, então $\overline{OA} = \frac{3}{4} \times 4 = 3$.

$\overline{AF}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OF}^2$, logo $\overline{AF}^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{AF}^2 = 25$. Daqui conclui-se que $\overline{AF} = 5$.

Uma vez que a base do prisma é regular, então $\overline{AB} = 5$ e, portanto, a abcissa do ponto B é igual a $3 + 5 = 8$ e as coordenadas são $(8, 0, 0)$.

Sendo $P(x, y, z)$ um qualquer ponto do espaço pertencente ao plano mediador de $[BG]$, tem-se que:

$\overline{BP} = \overline{GP} \Leftrightarrow \sqrt{(x-8)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2 + (z-12)^2}$

Daqui resulta que:

$(x-8)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = (x-0)^2 + (y-4)^2 + (z-12)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 64 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 - 8y + 16 + z^2 - 24z + 144$

$\Leftrightarrow -16x + 8y + 24z + 64 - 16 - 144 = 0$

$\Leftrightarrow -16x + 8y + 24z - 96 = 0$

$\Leftrightarrow 2x - y - 3z + 12 = 0$

Assim, uma equação cartesiana do plano mediador de $[BG]$ é $2x - y - 3z + 12 = 0$.

2.3 P é um ponto do terceiro octante, pelo que a sua abcissa e a sua ordenada são ambas negativas e a sua cota é positiva.

O plano IJK é definido por $z = 12$. Uma vez que o ponto P pertence a este plano, podemos garantir que a sua cota é 12. Assim:

$$k^2 + k = 12 \Leftrightarrow k^2 + k - 12 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-1-7}{2} \vee k = \frac{-1+7}{2}$$

$$\Leftrightarrow k = -4 \vee k = 3$$

Para $k = -4$: $y_P = -(-4) - 3 = 4 - 3 = 1 > 0$

Para $k = 3$: $y_P = -3 - 3 = -6 < 0$

Assim, o valor de k que obedece às condições do enunciado é 3.

3. Opção (A)

O gráfico de g obtém-se a partir do gráfico de f segundo uma translação horizontal associada ao vetor de coordenadas $(3, 0)$, o que significa que o domínio da função g é $[-3, 6]$, seguida de uma simetria em relação ao eixo Ox, o que alteraria o contradomínio da função g para o intervalo $[-6, 3]$. Contudo, face a uma posterior translação vertical associada ao vetor de coordenadas $(0, 3)$, o contradomínio da função g é $[-3, 6]$.

4. Opção (B)

$f(x) = a(x-h)^2 + k$, onde o ponto de coordenadas (h, k) representa o vértice da parábola, neste caso, $(1,\ 8)$. Desta forma, temos que $f(x) = a(x-1)^2 + 8$.

Como o ponto de coordenadas $(0,\ 6)$ é um ponto da parábola, então $f(0) = 6$. Assim:

$a(0-1)^2 + 8 = 6 \Leftrightarrow a = -2$

Desta forma, a função f fica definida por:

$$f(x) = -2(x-1)^2 + 8 = -2(x^2 - 2x + 1) + 8 =$$
$$= -2x^2 + 4x - 2 + 8 =$$
$$= -2x^2 + 4x + 6$$

5. Opção (D)

$g(-1) = (-1)^2 - 5 \times (-1) + 2 = 1 + 5 + 2 = 8$

$g(0) = 6 - 2 \times 0 = 6$

$g(2) = 6 - 2 \times 2 = 6 - 4 = 2$

$$\frac{-g(-1)}{g(0) - g(2)} = \frac{-8}{6-2} = -\frac{8}{4} = -2$$

6.

6.1 $f(x) = -|x-5| + 4 = \begin{cases} -(x-5)+4 & \text{se} \quad x - 5 \geq 0 \\ -[-(x-5)]+4 & \text{se} \quad x - 5 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x+5+4 & \text{se} \quad x \geq 5 \\ x-5+4 & \text{se} \quad x < 5 \end{cases}$

$$= \begin{cases} -x+9 & \text{se} \quad x \geq 5 \\ x-1 & \text{se} \quad x < 5 \end{cases}$$

6.2 $f(x) \geq -2 \Leftrightarrow -|x-5| + 4 \geq -2 \Leftrightarrow -|x-5| \geq -6$

$$\Leftrightarrow |x-5| \leq 6$$
$$\Leftrightarrow x - 5 \leq 6 \wedge x - 5 \geq -6$$
$$\Leftrightarrow x \leq 11 \wedge x \geq -1$$
$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 11$$

C.S. $= [-1, 11]$

7. Opção (C)

	1	-9	26	-18	-27	27
3		3	-18	24	18	-27
	1	-6	8	6	-9	0
3		3	-9	-3	9	
	1	-3	-1	3	0	
3		3	0	-3		
	1	0	-1	0		
3		3	9			
	1	3	8			

8. De acordo com os dados no enunciado, podemos concluir que:

$$P(x) = a(x-3)(x+1)(x+2)$$

O resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x-1$ é 24, pelo que $P(1) = 24$, de onde resulta que:

$a(1-3)(1+1)(1+2) = 24 \Leftrightarrow -12a = 24 \Leftrightarrow a = -2$

Assim, $P(x) = -2(x-3)(x+1)(x+2)$.

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	$\mathbf{-2}$		$\mathbf{-1}$		$\mathbf{3}$	$+\infty$
$-2(x-3)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

C.S. $= [-2, -1] \cup [3, +\infty[$

9. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, obtém-se as coordenadas dos pontos A e B, que são, respetivamente, $(3, 0)$ e $(1, 10)$.

Uma vez que C tem abcissa nula e a mesma ordenada do ponto B, as suas coordenadas são $(0, 10)$.

Desta forma, a área do trapézio $[OABC]$ é igual a:

$$\frac{3+1}{2} \times 10 = 20 \text{ u.a.}$$