Teste N.º 3 – Proposta de resolução

1. Opção (D)

I. $A + 2\overrightarrow{FG} = R$ é uma proposição falsa, pois $A + 2\overrightarrow{FG} = A + \overrightarrow{AM} = M$.

II. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AQ}$ é uma proposição verdadeira.

III. $S - 2\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{DI}$ é uma proposição falsa, pois $S + 2\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{ID} = S + \overrightarrow{SW} + \overrightarrow{ID} = W + \overrightarrow{WN} = N$.

2.

2.1. $x^2 + y^2 + 8x - 14y = -40 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 - 14y + 49 = -40 + 16 + 49$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 + (y-7)^2 = 25$$

Logo, $C(-4{,}7)$.

2.2. Opção (C)

A bissetriz dos quadrantes ímpares admite como vetor diretor o vetor de coordenadas (1, 1). Assim, uma equação vetorial da reta paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares que passa em C poderá ser:

$$(x, y) = (-4{,}7) + k(1{,}1), k \in \mathrm{IR}$$

2.3. $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 + 8x - 14y = -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ y^2 - 14y + 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ y = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \times 40}}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \\ y = \frac{14 \pm \sqrt{36}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \\ y = \frac{14 \pm 6}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 10 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

Logo, $A(0, 4)$ e $B(0, 10)$.

2.4. $\overrightarrow{BC} = C - B = (-4{,}7) - (0{,}10) = (-4, -3)$ $\qquad m_{BC} = \frac{3}{4}$

$BC: y = \dfrac{3}{4}x + 10$

$\overrightarrow{CA} = A - C = (0{,}4) - (-4{,}7) = (4, -3)$ $\qquad m_{CA} = -\frac{3}{4}$

$CA: y = -\dfrac{3}{4}x + 4$

Logo, o triângulo $[ABC]$ poderá ser definido por:

$$y \leq \frac{3}{4}x + 10 \ \wedge y \geq -\frac{3}{4}x + 4 \ \ \wedge \ \ x \leq 0$$

3.

3.1. Opção (D)

O ponto do plano DCG que se encontra mais próximo do ponto B é o ponto C, por se tratar da projeção ortogonal de B sobre o plano DCG.

$$C = G + \overrightarrow{EA} = \left(\frac{20}{7}, \frac{51}{7}, \frac{32}{7}\right) + (3, -6, 2) = \left(\frac{41}{7}, \frac{9}{7}, \frac{46}{7}\right)$$

Cálculo auxiliar

$\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AE} = (3, -6, 2)$

3.2. Por se tratar de um prisma quadrangular regular, sabemos que as bases $[ABCD]$ e $[EFGH]$ são quadrados.

$V_{\text{prisma}} = \overline{EF} \times \overline{EF} \times \overline{AE} = \overline{EF}^2 \times \overline{AE}$

$\overrightarrow{EG} = G - E = \left(\frac{20}{7}, \frac{51}{7}, \frac{32}{7}\right) - (4,7,2) = \left(-\frac{8}{7}, \frac{2}{7}, \frac{18}{7}\right)$

$\|\overrightarrow{EG}\| = \sqrt{\left(-\frac{8}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{18}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{64+4+324}{49}} =$

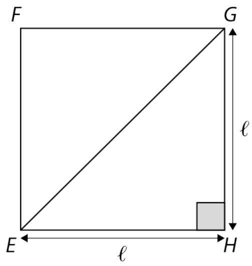
$= \sqrt{\frac{392}{49}} =$

$= \sqrt{8}$

Cálculo auxiliar

$E = A + \overrightarrow{AE} = (7, 1, 4) + (-3, 6, -2) =$

$= (4, 7, 2)$



$\left(\sqrt{8}\right)^2 = l^2 + l^2 \Leftrightarrow 8 = 2l^2 \Leftrightarrow l^2 = 4$

$\|\overrightarrow{AE}\| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+36+4} = \sqrt{49} = 7$

$V_{\text{prisma}} = 4 \times 7 = 28$ u.v.

3.3. A reta CG é paralela a AE, logo $\overrightarrow{AE}$ é um vetor diretor de CG.

Uma equação vetorial de CG poderá ser:

$$(x, y, z) = \left(\frac{20}{7}, \frac{51}{7}, \frac{32}{7}\right) + k(-3,6,-2), k \in \text{IR}$$

3.4. A superfície esférica de diâmetro $[AG]$ tem como centro o ponto médio do segmento de reta $[AG]$ e raio igual a $\frac{\overline{AG}}{2}$.

Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AG]$: $\left(\frac{7+\frac{20}{7}}{2}, \frac{1+\frac{51}{7}}{2}, \frac{4+\frac{32}{7}}{2}\right) = \left(\frac{69}{14}, \frac{58}{14}, \frac{60}{14}\right) = \left(\frac{69}{14}, \frac{29}{7}, \frac{30}{7}\right)$

$\overrightarrow{AG} = \left(\frac{20}{7}, \frac{51}{7}, \frac{32}{7}\right) - (7,1,4) = \left(-\frac{29}{7}, \frac{44}{7}, \frac{4}{7}\right)$

$\|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{\left(-\frac{29}{7}\right)^2 + \left(\frac{44}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{841+1936+16}{49}} = \sqrt{\frac{2793}{49}} = \sqrt{57}$

A equação reduzida da superfície esférica é:

$$\left(x-\frac{69}{14}\right)^2+\left(y-\frac{29}{7}\right)^2+\left(z-\frac{30}{7}\right)^2=\frac{57}{4}$$

3.5. α é o plano mediador do segmento de reta $[AG]$. Logo, pode ser definido por:

$$\sqrt{(x-7)^2+(y-1)^2+(z-4)^2}=\sqrt{\left(x-\frac{20}{7}\right)^2+\left(y-\frac{51}{7}\right)^2+\left(z-\frac{32}{7}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2-14x+49+y^2-2y+1+z^2-8z+16=x^2-\frac{40}{7}x+\frac{400}{49}+y^2-\frac{102}{7}y+\frac{2601}{49}+z^2-\frac{64}{7}z+\frac{1024}{49}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{58}{7}x+\frac{88}{7}y+\frac{8}{7}z-\frac{113}{7}=0$$

4. Opção (A)

Na opção (A), o gráfico cartesiano de f^{-1} é simétrico do gráfico cartesiano de f relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.

5. Opção (B)

O gráfico de h obtém-se a partir do gráfico de f segundo:

- uma translação associada ao vetor de coordenadas $(-1,0)$;
- mantendo os pontos de ordenada não negativa e efetuando uma simetria dos pontos de ordenada negativa em relação ao eixo Ox;
- uma translação associada ao vetor de coordenadas $(0,-1)$

Logo, é na opção (B) que poderá estar representado o gráfico da função h.

6. Seja $x\in \mathrm{IR}$.

$g(-x)=-(-x)\times f(-x)=x\times\left(-f(x)\right)$, pois f é ímpar.

$$=-x\times f(x)=$$

$$=g(x)$$

Logo, g é par, o que exclui a representação gráfica representada na opção II.

Sabemos que f é estritamente crescente em $[1,+\infty[$, isto é:

$$\forall x_1,x_2\in[1,+\infty[, x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Daqui se conclui que, para quaisquer $x_1,x_2\in[1,+\infty[$, se $x_1<x_2$, então $f(x_1)<f(x_2)$ e, consequentemente, $x_1f(x_1)<x_2f(x_2)$. Logo,$-x_1f(x_1)>-x_2f(x_2)$, ou seja, $g(x_1)>g(x_2)$.

Assim, g é estritamente decrescente em $[1,+\infty[$, o que não se verifica na representação gráfica III que apresenta uma função que não é estritamente decrescente em $[1,+\infty[$.

Como $f(x)<0$, $\forall x\in]0,1[$ e $-x<0,\forall x\in]0,1[$, tem-se que $g(x)=-xf(x)>0,\forall x\in]0,1[$, o que não se verifica na representação gráfica I que apresenta uma função que não é positiva em $]0,1[$.