Teste N.º 2 – Proposta de resolução

1. $\left(5+\sqrt{3}\right)x^2+\left(2-\sqrt{3}\right)x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-\left(2-\sqrt{3}\right)\pm\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2-4\times\left(5+\sqrt{3}\right)\times(-1)}}{2\left(5+\sqrt{3}\right)}$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-2+\sqrt{3}\pm\sqrt{4-4\sqrt{3}+3+20+4\sqrt{3}}}{2\left(5+\sqrt{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-2+\sqrt{3}\pm\sqrt{27}}{2\left(5+\sqrt{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-2+\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{2\left(5+\sqrt{3}\right)} \quad \vee \quad x=\frac{-2+\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{2\left(5+\sqrt{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-2+4\sqrt{3}}{2\left(5+\sqrt{3}\right)} \quad \vee \quad x=\frac{-2-2\sqrt{3}}{2\left(5+\sqrt{3}\right)}$$

Uma vez que pretendemos a solução positiva da equação, então a solução pretendida é $x=\frac{-2+4\sqrt{3}}{2\left(5+\sqrt{3}\right)}$.

Racionalizando o denominador, vem que:

$$\frac{\left(-2+4\sqrt{3}\right)\left(5-\sqrt{3}\right)}{2(25-3)}=\frac{-10+2\sqrt{3}+20\sqrt{3}-12}{44}=\frac{-22+22\sqrt{3}}{44}=$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

2. Opção (A)

Sabemos que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$, logo $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

Sabemos também que $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}$, logo:

$$\overrightarrow{PQ}=\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OA}-\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OA}-\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

Assim, $a=-\frac{1}{4}$ e $b=\frac{1}{2}$.

3. Opção (A)

Sabemos que a circunferência que delimita a região a sombreado tem centro de coordenadas (2, 2) e passa na origem no referencial.

Assim, o raio será igual a:

$\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$

Logo, uma equação que define o círculo é:

$$(x-2)^2+(y-2)^2\leq 8$$

A região a sombreado é constituída por duas regiões que não se intersetam:

- região no interior do círculo e pertencente ao semiplano aberto à esquerda da reta definida por $x = 0$:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 8 \ \wedge \ x < 0$$

- região no interior do círculo e pertencente ao semiplano aberto superior à reta definida por $y = 0$ e ao semiplano aberto inferior à reta definida por $y = x$:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 8 \ \wedge \ 0 < y < x$$

Como a região a sombreado corresponde à reunião das duas regiões descritas atrás e as duas regiões não se intersetam, então correspondem à disjunção das condições cujo conjunto-solução corresponde a cada região.

Assim, uma expressão que define a região a sombreado é:

$$[(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 8 \ \wedge \ x < 0] \vee [(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 8 \ \wedge \ 0 < y < x]$$

4. Sejam (a, b) e (c, d) as coordenadas dos centros das duas circunferências. Uma vez que as circunferências são tangentes ao eixo Oy, concluímos que o raio é igual ao valor absoluto da respetiva abcissa do centro, logo as seguintes equações definem, respetivamente, cada uma das circunferências:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 \qquad\qquad (x-c)^2 + (y-d)^2 = c^2$$

Como os pontos de coordenadas (a, b) e (c, d) pertencem à reta definida por $y = -2x - 1$, então $b = -2a - 1$ e $d = -2c - 1$.

Logo, as seguintes equações definem, respetivamente, cada uma das circunferências:

$$(x-a)^2 + (y+2a+1)^2 = a^2 \qquad\qquad (x-c)^2 + (y+2c+1)^2 = c^2$$

Uma vez que o ponto de coordenadas $(-2, 1)$ pertence às duas circunferências, vem que:

$$\begin{aligned}(-2-a)^2 + (1+2a+1)^2 = a^2 \Leftrightarrow 4 + 4a + a^2 + 4 + 8a + 4a^2 = a^2 &\Leftrightarrow 4a^2 + 12a + 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + 3a + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{2} \\ &\Leftrightarrow a = \frac{-3 \pm 1}{2} \\ &\Leftrightarrow a = -2 \ \vee \ a = -1\end{aligned}$$

$(-2-c)^2 + (1+2c+1)^2 = c^2 \Leftrightarrow c = -2 \ \vee \ c = -1$

Assim:

- se $x = -2$, então $y = -2 \times (-2) - 1 = 3$;
- se $x = -1$, então $y = -2 \times (-1) - 1 = 1$.

$(-2, 3)$ e $(-1, 1)$ são as coordenadas do centro de cada uma das circunferências.

Logo, $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$ e $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ são as equações reduzidas de cada uma das circunferências.

5.

5.1. $\overrightarrow{AB} = (-1, 2) - (0, 1) = (-1, 1)$

Como o vetor $\vec{u}$ é colinear e tem sentido contrário ao de $\overrightarrow{AB}$, então $\vec{u} = k\overrightarrow{AB}$, com $k \in \mathrm{IR}^-$.

$$\|\vec{u}\| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(-k)^2 + k^2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{2k^2} = 4$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}|k| = 4$$
$$\Leftrightarrow |k| = \frac{4}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow |k| = \frac{4\sqrt{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow |k| = 2\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow k = -2\sqrt{2} \quad \vee \quad k = 2\sqrt{2}$$

Se $k \in \mathbb{R}^-$, então $k = -2\sqrt{2}$.

Assim, $\vec{u} = (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.

5.2. $P(x, 2x)$

$$d(P, A) = d(P, B) \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (2x-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (2x-2)^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2 + (2x-1)^2 = (x+1)^2 + (2x-2)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 4x^2 - 4x + 1 = x^2 + 2x + 1 + 4x^2 - 8x + 4$$
$$\Leftrightarrow 8x - 2x - 4x = 4$$
$$\Leftrightarrow 2x = 4$$
$$\Leftrightarrow x = 2$$

Assim, $P(2, 4)$.

5.3. Opção (B)

$\overrightarrow{AB} = (-1, 1)$

$m_{AB} = \frac{1}{-1} = -1$

$AB\colon y = -x + 1$, pois a ordenada na origem é igual a 1.

$C(c, 0)$, pois C pertence ao eixo Ox.

Como C pertence à reta AB: $0 = -c + 1 \Leftrightarrow c = 1$

Logo, $C(1, 0)$.

Seja S um ponto de abcissa negativa, pertencente à reta AB.

Então, $S(x, -x + 1)$, com $x < 0$.

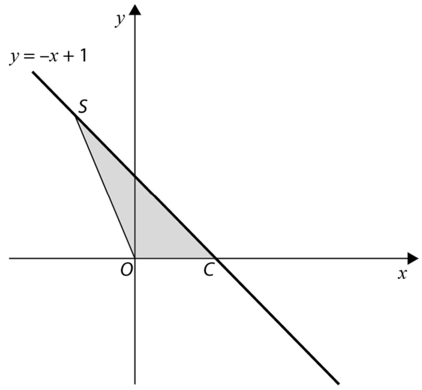
Como $x < 0$, então $-x > 0$ e $-x + 1 > 0$.

$A_{[OCS]} = \frac{11}{4} \Leftrightarrow \frac{\overline{OC} \times \text{ordenada de } S}{2} = \frac{11}{4} \Leftrightarrow \frac{1 \times (-x+1)}{2} = \frac{11}{4}$

$\Leftrightarrow -x + 1 = \frac{11}{2}$

$\Leftrightarrow -x = \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{9}{2}$



6. Opção (C)

$(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 \leq 25 \ \wedge \ z = -4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (-4+1)^2 \leq 25 \ \wedge \ z = -4$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + 9 \leq 25 \ \wedge \ z = -4$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x-1)^2 + y^2 \leq 16 \ \wedge \ z = -4}_{\text{círculo de centro } (1,0,-4) \text{e raio } 4}$

Logo, a área é igual a $\pi \times 4^2 = 16\pi$.

7.

7.1. Opção (B)

$\overrightarrow{AE} = (-2, -3, -6)$ $\qquad$ $AE: (x, y, z) = (3, 5, 4) + k(-2, -3, -6), k \in \mathbb{R}$

Procuramos um ponto da reta AE e do plano xOy, isto é, um ponto da reta AE com cota igual a zero:

$$\begin{cases} x = 3 - 2k \\ y = 5 - 3k \\ 0 = 4 - 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2 \times \frac{2}{3} \\ y = 5 - 3 \times \frac{2}{3} \\ k = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - \frac{4}{3} \\ y = 5 - 2 \\ k = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = 3 \\ k = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Assim, as coordenadas do ponto pedido são $\left(\frac{5}{3}, 3, 0\right)$.

7.2. $d(A, B) = \sqrt{(3-0)^2 + (5-11)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7$

$d(D, A) = 7 \Leftrightarrow \sqrt{(-k-3)^2 + (k-5)^2 + (k+4-4)^2} = 7$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(-k-3)^2 + (k-5)^2 + (k+4-4)^2}\right)^2 = 7^2$

$\Leftrightarrow k^2 + 6k + 9 + k^2 - 10k + 25 + k^2 = 49$

$\Leftrightarrow 3k^2 - 4k - 15 = 0$

$\Leftrightarrow k = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 3 \times (-15)}}{6}$

$\Leftrightarrow k = \frac{4 \pm 14}{6}$

$\Leftrightarrow k = 3 \ \vee \ k = -\frac{5}{3}$

Como $k \in \mathbb{R}^+$, então $k = 3$.

7.3. BF é paralela a AE, logo $\overrightarrow{AE} = (-2, -3, -6)$ é um vetor diretor de BF.

Assim, $BF: (x, y, z) = (0, 11, 2) + k(-2, -3, -6), k \in \mathbb{R}$.

7.4. O centro da superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo é o ponto médio do segmento de reta $[DF]$.

$F = B + \overrightarrow{AE} = (0, 11, 2) + (-2, -3, -6) = (-2, 8, -4)$ $\qquad$ $D(-3, 3, 7)$

Seja M o ponto médio de $[DF]$: $M\left(\frac{-3-2}{2}, \frac{3+8}{2}, \frac{7-4}{2}\right)$

$M\left(-\frac{5}{2}, \frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$$r = d(M, A) = \sqrt{\left(-\frac{5}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{11}{2} - 5\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 4\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{121}{4} + \frac{1}{4} + \frac{25}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{147}{4}}$$

Assim, $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{147}{4}$ é a equação reduzida da superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo.

7.5. O plano CAE é o plano mediador de $[DB]$:

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-11)^2 + (z-2)^2}$$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 14z + 49 = x^2 + y^2 - 22y + 121 + z^2 - 4z + 4$

$\Leftrightarrow 6x - 6y + 22y - 14z + 4z + 9 + 9 + 49 - 121 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 6x + 16y - 10z - 58 = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 8y - 5z - 29 = 0$