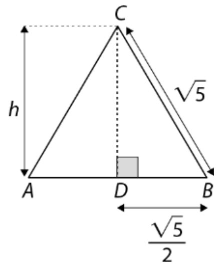
# Teste N.º 1 – Proposta de resolução

**1. Opção (B)**

$P_{[ABC]} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 3\overline{AB} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{5}$

$\left(\sqrt{5}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 5 = h^2 + \frac{5}{4} \Leftrightarrow 5 - \frac{5}{4} = h^2$

$\Leftrightarrow \frac{15}{4} = h^2$




$A_{[EFDC]} = \frac{15}{4}$

**2. Opção (C)**

**(A)** $\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{27} = 2 - 3 = -1$

$\sqrt[3]{8 - 27} = \sqrt[3]{-19} \neq -1$

$\forall a, b \in \text{IR}, \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a-b}$ é uma proposição falsa.

**(B)** $\sqrt[3]{8} \times \sqrt[5]{-1} = 2 \times (-1) = -2$

$\sqrt[15]{8 \times (-1)} = \sqrt[15]{-8} = -\sqrt[15]{8} = -\sqrt[5]{2} \neq -2$

$\forall a, b \in \text{IR}, \sqrt[3]{a} \times \sqrt[5]{b} = \sqrt[15]{a \times b}$ é uma proposição falsa.

**(C)** $\forall a, b \in \text{IR}, \sqrt[9]{a} \div \sqrt[3]{b} = \sqrt[9]{a} \div \sqrt[9]{b^3} = \sqrt[9]{\frac{a}{b^3}}$ é uma proposição verdadeira.

**(D)** $\sqrt{(-3)^2} = 3 \neq -3$

$\forall a \in \text{IR}, \sqrt{a^2} = a$ é uma proposição falsa.

**3. Opção (D)**

$2\sqrt{3}x - 1 = 3\sqrt{2}x + 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x - 3\sqrt{2}x = 4 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right)x = 4$

$\Leftrightarrow x = \frac{4}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{12-18}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{-6}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-4\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{3}$

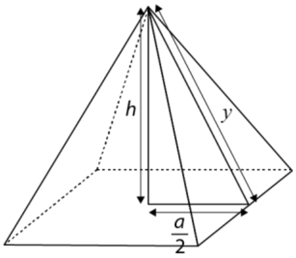
$\text{C.S.} = \left\{\frac{-4\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{3}\right\}$

**4.** $V_{\text{octaedro}} = 2 \times V_{\text{pirâmide}} = 2 \times \frac{1}{3} \times A_b \times h =$

$= \frac{2}{3} \times a^2 \times h =$

$= \frac{2}{3} a^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} a =$

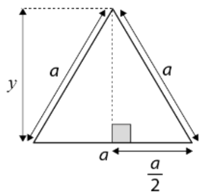
$= \frac{\sqrt{2}}{3} a^3$




**Cálculo auxiliar**

$a^2 = y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 - \frac{a^2}{4} = y^2 \Leftrightarrow \frac{3a^2}{4} = y^2$

$\Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{4} a^2$

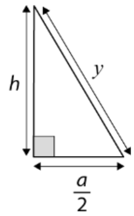



$y^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4} a^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} a^2 - \frac{1}{4} a^2 = h^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} a^2 = h^2 \Leftrightarrow h = \pm \sqrt{\frac{a^2}{2}}$

$\Leftrightarrow h = \pm \frac{|a|}{\sqrt{2}} \underset{a>0}{\underbrace{\Leftrightarrow}} h = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow h = \pm \frac{\sqrt{2}a}{2}$



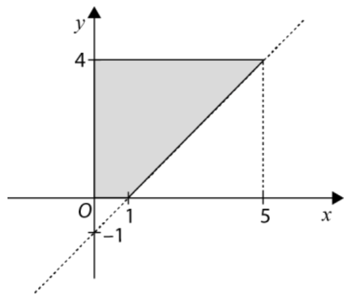

Como $h > 0$, então $h = \frac{\sqrt{2}}{2} a$.

**5.** $y - x + 1 \geq 0 \ \wedge \ \sim(x < 0) \ \wedge \ 0 \leq y \leq 4 \Leftrightarrow y \geq x - 1 \ \wedge \ x \geq 0 \wedge 0 \leq y \leq 4$

**Cálculo auxiliar**

| $x$ | $y = x - 1$ | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | (1, 0) |
| 5 | 4 | (5, 4) |

$A_{\text{trapézio}} = \frac{B+b}{2} \times h = \frac{5+1}{2} \times 4 = 12 \text{ u. a.}$




**6.** $\begin{cases} (x+a)^2 + (y-a)^2 = 2a^2 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (y-a)^2 = 2a^2 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-a)^2 = a^2 \\ x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y - a = a \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y - a = -a \\ x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2a \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

Como $A$ tem ordenada positiva, $A(0, 2a)$. Seja $P(x, -x)$, com $x < 0$.

$$A_{[OAP]} = 4a \Leftrightarrow \frac{\overline{OA} \times |\text{abcissa de } P|}{2} = 4a \Leftrightarrow \frac{2a \times (-x)}{2} = 4a$$

$$\Leftrightarrow -ax = 4a$$

$$\Leftrightarrow x = -4$$

Logo, $P(-4, 4)$.

**7.**

**7.1.** Seja $M$ o ponto médio de $[AB]$. Então, $M\left(\frac{7}{2}, 3\right)$.

$d(A, B) = \sqrt{(3-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

A equação reduzida da circunferência de diâmetro $[AB]$ é:

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = 5$$

**7.2.** O triângulo $[ABC]$ é equilátero se e somente se $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$.

$\overline{AB} = \sqrt{(3-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\overline{BC} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$

$\overline{AC} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$

$$\overline{AC} = \overline{BC} \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16$$

$$\Leftrightarrow 8y - 4y = 8x - 6x - 4 + 9$$

$$\Leftrightarrow 4y = 2x + 5$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$

Logo, $C\left(x, \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}\right)$.

$$\overline{AC} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{4} - 2\right)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-4)^2 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{4} - 2\right)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{4}x + \frac{9}{16} = 5$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 128x + 256 + 4x^2 - 12x + 9 = 80$$

$$\Leftrightarrow 20x^2 - 140x + 185 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 28x + 37 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \times 4 \times 37}}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{28 \pm \sqrt{192}}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{28 \pm 8\sqrt{3}}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7+2\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{7-2\sqrt{3}}{2}$$

**8. Opção (B)**

$$\sqrt[6]{4a^4} \times (2^2 a^{-2} b^{12})^{-\frac{1}{6}} = \sqrt[3]{2a^2} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times b^{-2} = 2^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times b^{-2} =$$

$$= 2^0 \times a \times b^{-2} =$$

$$= \frac{a}{b^2}$$

**9. Opção (B)**

$(x+2)^2 + (y-1)^2 \leq 3^2 \qquad C(-2, 1)$

$y = x + 3$

$C$ pertence à reta definida por $y = x + 3$, pois $1 = -2 + 3$.

Logo, $(x+2)^2 + (y-1)^2 \leq 3^2 \wedge \; y - x - 3 = 0$ define um diâmetro do círculo.

Assim, $d = 2 \times r = 2 \times 3 = 6$.

**10.** $A(0, 3)$

$B(x, y)$, com $x^2 = 12y \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{12}$, logo $y \geq 0$.

$$\overline{AB} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 6y + 9} =$$

$$= \sqrt{12y + y^2 - 6y + 9} =$$

$$= \sqrt{y^2 + 6y + 9} =$$

$$= \sqrt{(y+3)^2} =$$

$$= |y + 3| =$$

$= y + 3$, pois $y + 3 > 0$.

**11.**

**11.1.** $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 \; + y^2 + 6y + 9 = 16 + 9$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 + (y+3)^2 = 25$$

Logo, o centro da circunferência tem coordenadas$(-4, -3)$.

**11.2.** $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+4)^2+(y+3)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(x+4)^2+(y+3)^2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=x^2+8x+16+y^2+6y+9$

$\Leftrightarrow -6y=8x+25$

$\Leftrightarrow y=-\frac{4}{3}x-\frac{25}{6}$

**11.3.**

- Interseção da circunferência com o eixo $Ox$:

$\begin{cases} x^2+y^2+8x+6y=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+8x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+8)=0 \\ y=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-8 \\ y=0 \end{cases}$

Como $A$ tem menor abcissa, então $A(-8{,}0)$.

- Interseção da circunferência com o eixo $Oy$:

$\begin{cases} x^2+y^2+8x+6y=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+6y=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y+6)=0 \\ x=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-6 \\ x=0 \end{cases}$

Como $C$ tem menor ordenada, então $C(0,-6)$.

Reta $AB: y=mx+b$ $\quad A(-8{,}0) \quad B(-4,-6)$

$m=\frac{-6-0}{-4+8}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$

$y=-\frac{3}{2}x+b$

Como o ponto $A(-8{,}0)$ pertence à reta, vem que:

$0=-\frac{3}{2}\times(-8)+b \Leftrightarrow 0=12+b \Leftrightarrow b=-12$

$AB: y=-\frac{3}{2}x-12$

Uma condição que define o trapézio $[OABC]$ é:

$$x\leq 0 \ \wedge \ -6\leq y\leq 0 \ \wedge \ y\geq -\frac{3}{2}x-12$$