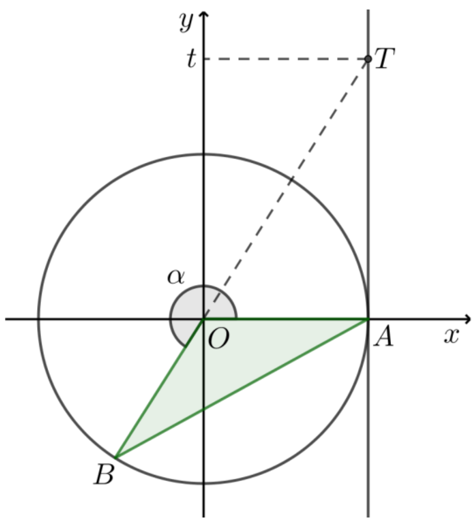
QUESTÃO-AULA – Matemática A 11.º ano

Nome: ________________________________ **Turma:** ____ **N.º** ____ **Data:** ___/___/___
Classificação: ____________________ **Prof.:** ______________ **Enc. Ed.:** ______________

Na figura ao lado, estão representados, em referencial ortonormado, Oxy, a circunferência trigonométrica, a reta de equação $x=1$ e o triângulo $[AOB]$.



Sabe-se que:

- o ponto A é a interseção do eixo das abcissas com a reta vertical;
- o ponto T pertence à reta vertical e tem ordenada $t>0$;
- o ponto B, pertencente ao 3.º quadrante, é a interseção da circunferência trigonométrica com a reta OT;
- $A\hat{O}B=\alpha$.

1. Determina a área do triângulo $[AOB]$, para $\alpha=\frac{7\pi}{6}$.

2. Determina a área do triângulo $[AOB]$, para $t=\frac{12}{5}$.

3. Mostra que a área do triângulo $[AOB]$ é dada, em função de α, pela expressão

$$-\frac{\sin\alpha}{2} \quad \left(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$$

4. Determina o valor de t, sabendo que a área do triângulo $[AOB]$ é igual a $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

5. Mostra que o perímetro do triângulo $[AOB]$ é dado, em função de α, pela expressão

$$2+\sqrt{2-2\cos\alpha} \quad \left(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$$

6. Determina o perímetro do triângulo $[AOB]$, para $\sin(\alpha+\pi)=\frac{3}{5}$.

COTAÇÕES

1.	2.	3.	4.	5.	6.
20	40	30	30	50	30

Carlos Andrade | Pedro Pimenta | Simone Azevedo

PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

1.

$$\text{Área}_{[AOB]} = \frac{\overline{OA} \times |y_B|}{2} = \frac{1 \times \left|\sin \frac{7\pi}{6}\right|}{2} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}.$$

2.

$$\tan \alpha = t = \frac{12}{5}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{169}{25} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm\sqrt{\frac{25}{169}} = \pm\frac{5}{13}$$

Como $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, tem-se $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$

$$\sin \alpha = \tan \alpha \times \cos \alpha = \frac{12}{5} \times \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{12}{13}$$

$$\text{Área}_{[AOB]} = \frac{\overline{OA} \times |y_B|}{2} = \frac{1 \times \frac{12}{13}}{2} = \frac{6}{13}.$$

3.

$$\text{Área}_{[AOB]} = \frac{\overline{OA} \times |y_B|}{2} = \frac{1 \times |\sin \alpha|}{2}$$

Como, para $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\sin \alpha < 0$, tem-se $|\sin \alpha| = -\sin \alpha$.

Conclui-se, portanto, que $\text{Área}_{[AOB]} = -\frac{\sin \alpha}{2}$.

4.

$$-\frac{\sin \alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \underset{\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}}{\Leftrightarrow} \alpha = \frac{4\pi}{3}.$$

$$t = \tan \frac{4\pi}{3} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

5.

$\overline{AO} = \overline{BO} = 1;$

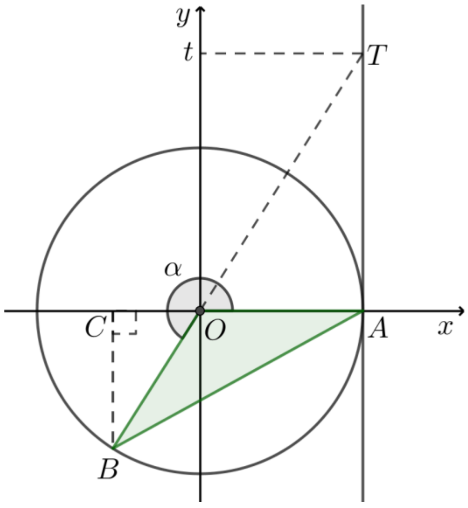
$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$

$\overline{AB} = \sqrt{|\sin\alpha|^2 + (1+|\cos\alpha|)^2} = \sqrt{\sin^2\alpha + 1 + 2|\cos\alpha| + \cos^2\alpha}$

Como, para $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\cos\alpha < 0$, tem-se $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$.

$\overline{AB} = \sqrt{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 1 + 2(-\cos\alpha)} =$

$= \sqrt{1+1-2\cos\alpha} = \sqrt{2-2\cos\alpha}$.



$\text{Perímetro}_{[AOB]} = 2 + \sqrt{2-2\cos\alpha}$.

6.

$\sin\alpha = -\sin(\alpha+\pi) = -\frac{3}{5}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{16}{25}}$

Como $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, tem-se $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

$\text{Perímetro}_{[AOB]} = 2 + \sqrt{2 - 2\times\left(-\frac{4}{5}\right)} = 2 + \sqrt{2+\frac{8}{5}} = 2 + \sqrt{\frac{18}{5}} = 2 + 3\sqrt{\frac{2}{5}} = 2 + \frac{3}{5}\sqrt{10}$