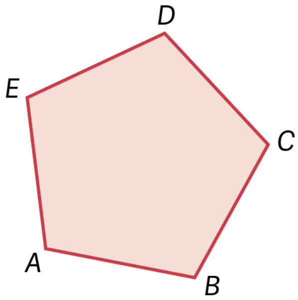
Proposta de resolução do teste de avaliação [maio – 2023]

1. Na figura está representado um pentágono regular $[ABCDE]$.

Fixada uma unidade de comprimento, sabe-se que a medida do perímetro do pentágono é igual a 20.



O valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$ é representado por um número que pertence ao intervalo:

(A) $\left]\frac{9}{2}, 5\right[$ **(B)** $\left]1, \frac{6}{5}\right[$

(C) $\left]-\frac{9}{2}, -4\right[$ **(D)** $\left]-5, -\frac{19}{4}\right[$

Soma dos ângulos internos do pentágono $[ABCDE]$: $(5-2)\times 180^\circ = 540^\circ$

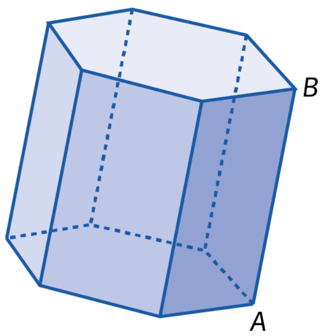
$B\hat{A}E = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$

$\overline{AB} = \overline{AE} = \frac{20}{5} = 4$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AE}\right\| \times \cos 108^\circ = 4 \times 4 \times \cos 108^\circ \approx -4{,}944$

Opção correta: **(D)** $\left]-5, -\frac{19}{4}\right[$

2. Na figura está representado um prisma hexagonal reto.
Em relação a um referencial o. n. $Oxyz$, os vértices A e B têm coordenadas $(-1, 2, 1)$ e $(1, 0, 3)$, respetivamente.



2.1 Representa por uma equação, na forma reduzida, a superfície esférica em que $[AB]$ é um diâmetro.

Seja C o ponto médio de $[AB]$.

As coordenadas de C são $\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (0, 1, 2)$

Raio da superfície esférica: $\overline{CA} = \sqrt{(-1-0)^2 + (2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{3}$

Equação da superfície esférica: $x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 3$

2.2 Seja α o plano que contém a base do prisma a que pertence o ponto B.
Uma equação do plano α é:

(A) $2x-y+z-2=0$ **(B)** $x-y+z=4$

(C) $x+y-z=-2$ **(D)** $x+2y+z=4$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(2,-2,2)$ é um vetor normal ao plano α.

O ponto B de coordenadas $(1,0,3)$ pertence ao plano α.

$\alpha:\ 2x-2y+2z+d=0$

$2\times1-2\times0+2\times3+d=0 \Leftrightarrow d=-8$

$\alpha:\ 2x-2y+2z-8=0 \Leftrightarrow x-y+z=4$

Opção correta: **(B)** $x-y+z=4$

3. Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ definida por $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$.

Seja g a função definida por $g(x)=-f(x-k),\ k\in\mathbb{R}$.

Sabe-se que a reta de equação $x=3$ é assíntota vertical ao gráfico de g.
Podes concluir que o valor de k é:

(A) 3 **(B)** -2

(C) 4 **(D)** 2

$f(x)=\dfrac{2x}{x+1}=2-\dfrac{2}{x+1}$

Assíntotas ao gráfico de f:

Assíntotas verticais: $x=-1$

Assíntotas horizontais: $y=2$

Assíntotas ao gráfico de g:

Assíntotas verticais: $x=-1+k$

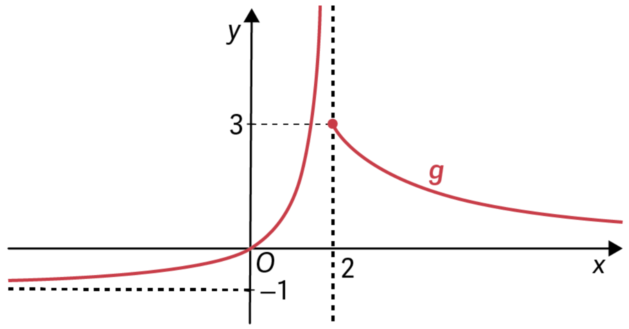
Assíntotas horizontais: $y=-2$

$-1+k=3 \Leftrightarrow k=4$

Opção correta: **(C)** 4

4. Na figura está representada parte do gráfico de uma função g de domínio $\mathbb{R}$.
Sabe-se que:

- a reta definida por $x=2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de g;
- as retas definidas por $y=0$ e $y=-1$ são assíntotas horizontais ao gráfico de g.



Sejam (u_n) , (v_n) e (w_n) as sucessões de termos gerais:

$$u_n = 2-\frac{1}{n} \;,\quad v_n=\frac{n^2}{\frac{1}{2}-n} \;\text{ e }\; w_n=\frac{2n+3}{n+1}$$

Estabelece a correspondência correta.

$\lim g(u_n)=$ •	• $-\infty$
	• -2
$\lim g(v_n)=$ •	• -1
	• 1
$\lim g(w_n)=$ •	• 3
	• $+\infty$

$$\lim u_n = \lim\left(2-\frac{1}{n}\right)=2^-$$

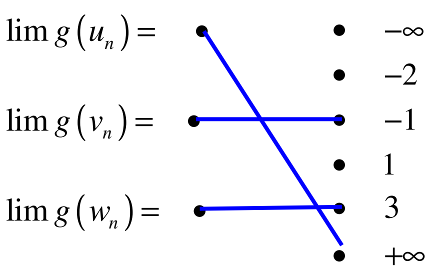
Logo, $\lim g(u_n)=+\infty$.

$$\lim v_n = \lim\left(\frac{n^2}{\frac{1}{2}-n}\right)=\lim\left(\frac{1}{\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{n}}\right)=-\infty$$

Logo, $\lim g(v_n)=-1$.

$$\lim w_n = \lim\frac{2n+3}{n+1}=\lim\left(2+\frac{1}{n+1}\right)=2^+ .$$

Logo, $\lim g(w_n)=3$.



5. Considera a função *f*, de domínio IR, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} & \text{se } x>0\\[2mm] \dfrac{3x+1}{4-x} & \text{se } x\leq 0\end{cases}$$

Estuda a função *f* quanto à continuidade em $x=0$.

$0\in D_f$. $f(0)=\dfrac{0+1}{4-0}=\dfrac{1}{4}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{3x+1}{4-x}=\frac{1}{4}$$

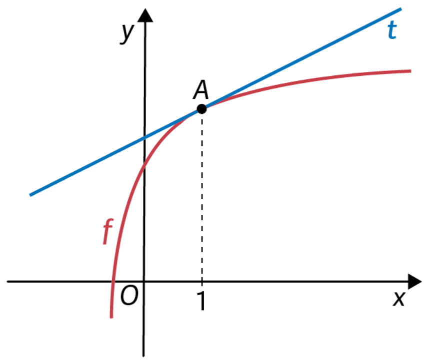
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\frac{1}{4}$$

Como $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, conclui-se que *f* é contínua em $x=0$.

6. Na figura está representada parte do gráfico de uma função *f*.
Sabe-se que:

- a reta *t* é tangente ao gráfico de *f* no ponto *A* de abcissa 1;
- a reta *t* é definida pela equação $y=0,5x+2,5$.



6.1 Determina, na forma reduzida uma equação da reta *s* que passa em *A* e é perpendicular à reta *t*.

O declive da reta *t* é $\dfrac{1}{2}$.

O declive da reta *s* é -2.

Coordenadas do ponto *A*: $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\times 1+\dfrac{5}{2}\right)=(1,3)$

s: $y=-2x+b$

$3=-2\times 1+b\Leftrightarrow b=5$

Equação da reta s: $y=-2x+5$

6.2 Indica o valor de $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0,5$$

7. Considera a função *f* de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definida por $f(x)=1+\frac{2}{x}$.

A reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 2 interseta a assíntota horizontal ao gráfico de *f* no ponto *P*.
Determina as coordenadas de *P*.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)=1+0=1$

Assíntota horizontal: $y=1$

Reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 2:

Coordenadas do ponto de tangência: $(2,f(2))$, ou seja, $(2,2)$.

Declive da reta tangente:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{1+\frac{2}{x}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{2}$$

Equação da reta tangente: $y=-\frac{1}{2}x+b$

O ponto de coordenadas (2,2) pertence à reta:

$2=-1+b \Leftrightarrow b=3$

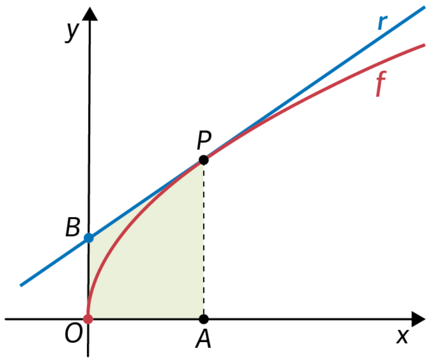
$y=-\frac{1}{2}x+3$

As coordenadas do ponto *P* são solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} y=1 \\ y=-\frac{1}{2}x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=4 \end{cases}$$

O ponto *P* tem coordenadas $(4,1)$.

8. Seja *f* a função de domínio $\mathbb{R}_0^+$, definida por $f(x)=\sqrt{x}$.



O ponto *P* pertence ao gráfico de *f* e a reta *r* é tangente ao gráfico no ponto *P*.

Sabe-se que:

- a reta *r* interseta o eixo *Oy* no ponto *B*;
- a projeção ortogonal do ponto *P* sobre *Ox* é o ponto *A*;
- [*OAPB*] é um trapézio.

Considera que as coordenadas do ponto *P* são $\left(a,\sqrt{a}\right)$.

Seja *g* a função que a cada valor positivo de *a* faz corresponder a área do trapézio [*OAPB*].

Mostra que $g(a)=\dfrac{3a\sqrt{a}}{4}$.

Declive da reta *r* é dado por $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

$$\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Equação da reta *r*: $y=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}x+b$

O ponto *P* pertence à reta *r*. Então: $\sqrt{a}=\dfrac{a}{2\sqrt{a}}+b\Leftrightarrow b=\dfrac{\sqrt{a}}{2}$

Equação da reta *r*: $y=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}x+\dfrac{\sqrt{a}}{2}$

O ponto *B* tem coordenadas $\left(0,\dfrac{\sqrt{a}}{2}\right)$.

Área do trapézio, ou seja, $g(a)$:

$$g(a)=\frac{\overline{AP}+\overline{OB}}{2}\times\overline{OA}=\frac{\sqrt{a}+\frac{\sqrt{a}}{2}}{2}\times a=\frac{3a\sqrt{a}}{4}$$

$$g(a)=\frac{3a\sqrt{a}}{4}$$