Proposta de teste de avaliação

Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:** JANEIRO 2023

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{4}x\right)$.

1.1. Mostre que f é uma função ímpar.

1.2. Indique o valor lógico da afirmação "O período positivo mínimo de f é 8."

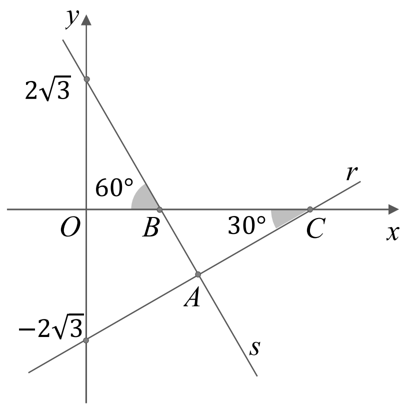
1.3. Considerando a restrição de f a $[-1, 5]$, determine:

a) a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de ordenada 1.

b) o(s) minimizante(s) de f.

c) a área do polígono definido pelos pontos do gráfico da função f, cujas abcissas foram encontradas na questão anterior.

2. Observe a figura onde estão representadas, num referencial ortonormado xOy, as retas r e s que têm ordenadas na origem simétricas.



Mostre que o triângulo $[ABC]$ tem $2\sqrt{3}$ unidades de área.

3. Sejam $\vec{u} = (-3, 2\sqrt{2} + a)$ e $\vec{v} = \left(\frac{1}{3}, -2\sqrt{2} + a\right)$ com $a \in \mathbb{R}$.

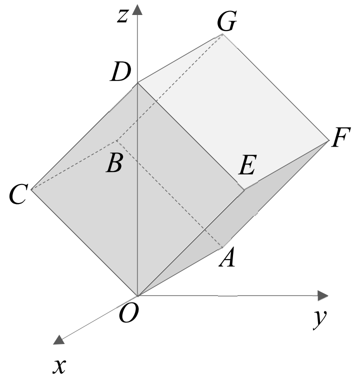
O ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é agudo se a tiver o valor:

(A) -4 **(B)** -3

(C) 2 **(D)** 4

4. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[OABCDEFG]$.

Sabe-se que D é um ponto do semieixo positivo Oz, A é um ponto do semieixo negativo Ox e que a aresta do cubo mede $\sqrt{2}$ unidades.



4.1. As coordenadas do ponto D são:

(A) $(0,0,2)$ **(B)** $(0,0,4)$

(C) $(0,0,\sqrt{2})$ **(D)** $(0,0,2\sqrt{2})$

4.2. Escreva uma equação vetorial da reta CG.

4.3. Escreva uma equação cartesiana do plano CEG.

5. Considere o ponto $A(-4,2,1)$ e a reta

$r: (x,y,z) = (-5,2,-1) + k(2,-1,3), k \in \mathbb{R}$

5.1. Justifique que o ponto A e a reta r podem definir um plano.

5.2. Designado por β o plano definido por A e r, mostre que $\beta: 2x + y - z = -7$

5.3. A reta $s: (x,y,z) = (3,-2,\sqrt{5}) + k(2,-1,3), k \in \mathbb{R}$

(A) é concorrente não perpendicular ao plano β.

(B) está contida no plano β.

(C) é concorrente perpendicular ao plano β.

(D) é estritamente paralela ao plano β.

6. Sejam P e Q dois pontos do espaço.

O lugar geométrico dos pontos R do espaço tais que $\overrightarrow{RP}.\overrightarrow{RQ} = 0$ é:

(A) o plano mediador de $[PQ]$. **(B)** circunferência de diâmetro $[PQ]$.

(C) a superfície esférica de diâmetro $[PQ]$. **(D)** a mediatriz de $[PQ]$.

7. Considere a sucessão (a_n) de termo geral $a_n = \frac{2n+6}{n+2}$.

7.1. Averigue se $\frac{17}{9}$ é termo da sucessão.

7.2. Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} < a_n$.

7.3. Mostre que (a_n) é limitada.

8. Seja (u_n) a sucessão definida por:

$$u_n = \begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + 5, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

8.1. Mostre que se trata de uma progressão aritmética.

8.2. Escreva o termo geral de (u_n).

8.3. Quantos termos, a partir do terceiro, temos de considerar para que a sua soma seja 414?

FIM

COTAÇÕES

Item																				
Cotação (em pontos)																				
1.1.	**1.2.**	**1.3.a)**	**1.3.b)**	**1.3.c)**	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.**	**7.1**	**7.2.**	**7.3.**	**8.1.**	**8.2.**	**8.3.**	
10	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**200**

Proposta de resolução

1.

1.1. $f(x) = 2\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}x\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

Uma função é ímpar se $\forall x \in D_f, -x \in D_f \ \wedge \ f(-x) = -f(x)$.

Como $D_f = \mathbb{R}$, se $x \in D_f$ então $-x \in D_f$.

$f(-x) = -2\ \sin\left(\frac{\pi}{4}(-x)\right) = -2\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}x\right) = 2\ \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) = -f(x)$.

Assim, podemos concluir que a função f é ímpar.

1.2. Seja P o período positivo mínimo da função f.

Se $x \in D_f$ então $x + P \in D_f$, porque que $D_f = \mathbb{R}$.

$$f(x+P) = -2\sin\left(\frac{\pi(x+P)}{4}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi P}{4}\right)$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+P) = f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -2\sin\left(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi P}{4}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sin\left(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi P}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

Como 2π é o período positivo mínimo da função seno, terá de ser

$$\frac{\pi P}{4} = 2\pi \Leftrightarrow P = 8$$

O valor lógico da afirmação é verdadeiro.

1.3. $f_{|[-1,5]}$

a) $f(x) = 1 \Leftrightarrow -2\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ \frac{\pi}{4}x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{14}{3} + 8k \ \vee x = -\frac{2}{3} + 8k, k \in \mathbb{Z}$$

Em $[-1, 5]$, as abcissas são $-\frac{2}{3}$ e $\frac{14}{3}$.

b) Como $D_f = \mathbb{R}$, $\frac{\pi}{4}x$ toma qualquer valor real pelo que

$$-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq -2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq f(x) \leq 2$$

Logo, o contradomínio de f é: $[-2, 2]$

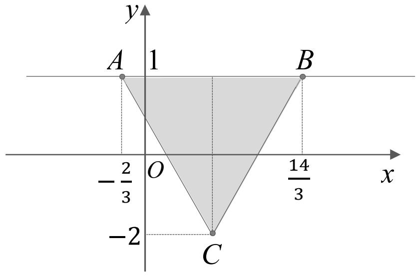
Minimizantes:

$$f(x) = -2 \Leftrightarrow -2\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) = -2 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2 + 8k, k \in \mathbb{Z}$$

Em $[-1, 5]$, o minimizante é 2.

c) Os pontos $A\left(-\frac{2}{3},1\right)$; $B\left(\frac{14}{3},1\right)$ e $C(2,-2)$ definem um triângulo de base $[AB]$ e altura igual à diferença das ordenadas de *A* e *C*.

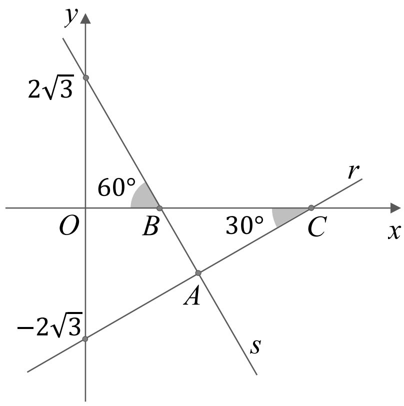


$$\overline{AB} = \left|\frac{14}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| = \frac{16}{3}$$

Altura : $|1-(-2)|=3$

$$A = \frac{\frac{16}{3}\times 3}{2} = 8 \text{ unidades de área.}$$

2. Reta *r*:



Inclinação da reta $r = 30°$. Então $m_r = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ordenada na origem: $-2\sqrt{3}$

$$r: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3}$$

Ponto *C*:

$$0 = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 6$$

$C(6,0)$

Reta *s*:

Inclinação da reta $s = 180° - 60° = 120°$. Então $m_s = \tan 120° = -\sqrt{3}$.

$$s: y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$$

Ponto B:

$$0 = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 2$$

$B(2,0)$

Ponto A:

$$y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} \ \wedge \ y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow -3x + 6 = x - 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$$

$$y = -\sqrt{3}$$

Ponto $A(3, -\sqrt{3})$

Área do triângulo: $\frac{(6-2)\times\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

3. Se o ângulo é agudo então $\vec{u}.\vec{v} > 0$

Sendo $\vec{u} = (-3, 2\sqrt{2} + a)$ e $\vec{v} = \left(\frac{1}{3}, -2\sqrt{2} + a\right)$,

$$\vec{u}.\vec{v} > 0 \Leftrightarrow -3 \times \frac{1}{3} + (2\sqrt{2} + a)(-2\sqrt{2} + a) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 + a^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow a^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow a \in \left]-3, 3\right[$$

Resposta: (C)

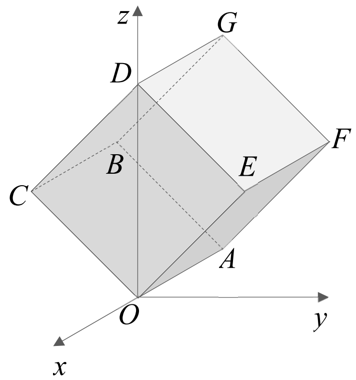
4.

4.1. Se a aresta do cubo mede $\sqrt{2}$, então, sendo x a sua diagonal, temos $x^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (porque } x > 0 \text{ dado ser um comprimento).}$$

Como *D* é um ponto do eixo das cotas, tem abcissa e ordenada nula pelo que $D(0,0,2)$.

Resposta: (A)



4.2. $C(0, -1, 1)$ e $G(-\sqrt{2}, 0, 2)$

Vetor diretor: $\overrightarrow{CG} = \left(-\sqrt{2}, 1, 1\right)$

Reta *CG*: $(x, y, z) = (0, -1, 1) + k\left(-\sqrt{2}, 1, 1\right), k \in \mathbb{R}$

4.3. Plano *CEG*

$\overrightarrow{CG} = \left(-\sqrt{2}, 1, 1\right)$

$\overrightarrow{CE} = (0, 1, 1) - (0, -1, 1) = (0, 2, 0)$

Seja $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor normal ao plano *CEG*

$$\vec{n}.\overrightarrow{CG} = 0 \quad \wedge \ \vec{n}.\overrightarrow{CE} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a, b, c).\left(-\sqrt{2}, 1, 1\right) = 0 \\ (a, b, c).(0, 2, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}a + b + c = 0 \\ 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}a + c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \sqrt{2}a \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Logo, $\vec{n} = (a, 0, \sqrt{2}a)$.

Para $a = 1$, $\vec{n} = (1, 0, \sqrt{2})$

O ponto $C(0, -1, 1)$ pertence ao plano *CEG*:

$$(x - 0) + \sqrt{2}(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{2}z = \sqrt{2}$$

5.

5.1. Se A não pertencer a r podemos definir um plano.

$(-4,2,1) = (-5,2,-1) + k(2,-1,3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-4,2,1) = (-5+2k, 2-k, -1+3k) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4 = -5 + 2k \ \wedge \ 2 = 2 - k \ \wedge \ 1 = -1 + 3k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \wedge \ k = 0 \ \wedge \ k = \frac{2}{3}$

Como o sistema é impossível, o ponto A não pertence à reta r e, como tal, podem definir um plano.

5.2. Vetor diretor da reta: $\vec{r} = (2,-1,3)$

Sendo $R(-5,2,-1)$ um ponto da reta r, vamos definir

$\overrightarrow{AR} = (-5,2,-1) - (-4,2,1) = (-1,0,-2)$

Seja $\vec{n}_\beta = (a,b,c)$

$\vec{n}_\beta . \vec{r} = 0 \ \wedge \ \vec{n}_\beta . \overrightarrow{AR} = 0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (a,b,c).(2,-1,3) = 0 \\ (a,b,c).(-1,0,-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b + 3c = 0 \\ -a - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b + 3c = 0 \\ a = -2c \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -c \\ a = -2c \end{cases}$

Logo, $\vec{n}_\beta = (-2c, -c, c)$.

Para $c = 1$ vem $\vec{n}_\beta = (-2,-1,1)$.

$A(-4,2,1)$

$\beta\colon -2(x+4) - 1(y-2) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x - y + z = 7 \Leftrightarrow 2x + y - z = -7$

5.3. Ponto genérico da reta s: $S\left(3+2k, -2-k, \sqrt{5}+3k\right)$

Plano β: $2x + y - z = -7$

$2(3+2k) + (-2-k) - \left(\sqrt{5}+3k\right) = -7 \Leftrightarrow 6 + 4k - 2 - k - \sqrt{5} - 3k = -7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 - \sqrt{5} = -7$

A equação é impossível pelo que a reta é estritamente paralela ou está contida no plano.

Ponto da reta s: $(3,-2,\sqrt{5})$

Se o ponto pertencer ao plano, a reta está contida no plano, caso contrário, a reta é estritamente paralela a β.

$2 \times 3 - 2 - \sqrt{5} = -7$ é falso. Então a reta é estritamente paralela ao plano β.

Resposta: (D)

6. Dados dois pontos do espaço, P e Q, o lugar geométrico dos pontos R tais que $\overrightarrow{RP}.\overrightarrow{RQ} = 0$ é a superfície esférica de diâmetro $[PQ]$.

Resposta: (C)

7. $a_n = \frac{2n+6}{n+2}$

7.1. $\frac{2n+6}{n+2} = \frac{17}{9} \Leftrightarrow 17n + 34 = 18n + 54 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -n = 20 \Leftrightarrow n = -20$

Como $-20 \notin \mathbb{N}$, $\frac{17}{9}$ não é termo da sucessão.

7.2. $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n < 0$

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)\ +\ 6}{n+1\ +\ 2} = \frac{2n+8}{n+3}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+8}{n+3} - \frac{2n+6}{n+2} = \frac{2n^2+4n+8n+16-2n^2-6n-6n-18}{(n+3)(n+2)}$$

$$= \frac{-2}{(n+3)(n+2)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

7.3. $\frac{2n+6}{n+2} = 2 + \frac{2}{n+2}$

$n \geq 1 \Leftrightarrow n+2 \geq 3 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{2}{n+2} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2 < 2 + \frac{2}{n+2} \leq \frac{8}{3}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 2n\ +\ 6 & n+2 \\ \cline{2-2} -2n-4 & 2 \\ \hline 2 & \end{array}$$

Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 < a_n \leq \frac{8}{3}$, a sucessão é limitada.

8.

8.1. $u_{n+1} = u_n + 5, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 5, \forall n \in \mathbb{N}$.

Como a diferença entre quais quer dois termos consecutivos é constante, (u_n) é uma progressão aritmética.

8.2. $u_n = u_1 + (n-1) \times r$

$u_n = -3 + (n-1) \times 5 \Leftrightarrow u_n = -8 + 5n$

8.3. $u_2 = -8 + 5 \times 2 \Leftrightarrow u_2 = 2$

$$S_n - S_2 = 414 \Leftrightarrow \frac{-3+5n-8}{2} \times n - (-3+2) = 414 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5n-11) \times n + 2 = 828 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5n^2 - 11n - 826 = 0 \Leftrightarrow n = 14\ (n \in \mathbb{N})$$

$$n = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 + 4 \times 5 \times 826}}{10}$$

$$n = 14 \vee n = -\frac{59}{5}$$

Temos de adicionar 12 termos a partir do terceiro para que a soma desses termos seja 414.