s

# Proposta de teste de avaliação

## Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

---

**Duração:** 90 minutos | **Data:** FEVEREIRO 2024

---

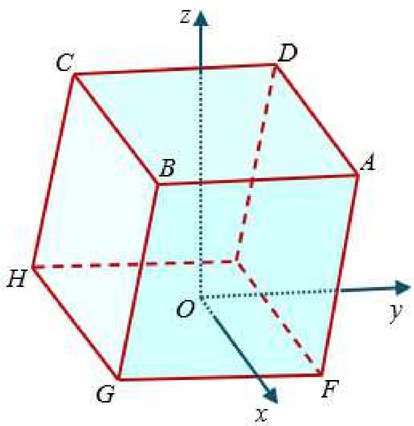
Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

**1.** Na figura seguinte, está representado, num referencial o.n. *Oxyz*, o cubo $[ABCDEFGH]$ (o ponto *E* não está representado na figura).

Sabe-se que:

- o ponto *H* tem coordenadas $(-2,-5\,,1)$;
- *ABG* é definido pela equação $6x+2y-3z-24=0$.



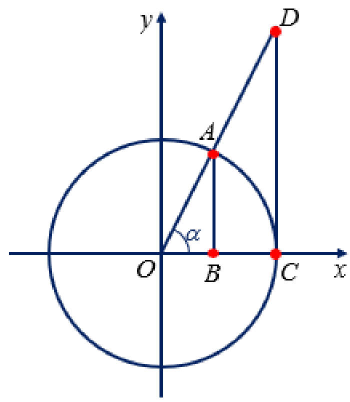

**1.1.** Mostre que o plano *HCD* pode ser definido pela equação $6x+2y-3z+25=0$.

**1.2.** Determine as coordenadas do ponto *G*.

**2.** Na figura ao lado, está representada a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- o ponto *B* pertence ao eixo *Ox*;
- o ponto *C* tem coordenadas $(1,0)$;
- o ponto *D* tem coordenadas $(1,2)$;
- o ponto $A$ é a interseção do segmento de reta $[OD]$ com a circunferência;
- o segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao eixo *Oy*;
- $\alpha$ é a amplitude do ângulo *BOA* $\left(\alpha \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[\right)$.




Quais são as coordenadas do ponto *A* ?

**(A)** $\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$ **(B)** $\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$ **(C)** $\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ **(D)** $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

**3.** Considere a função $f$, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=1-2\cos\left(\frac{2x-3\pi}{2}\right)$.

**3.1.** Mostre que $f(x)=1+2\sin(x)$.

**3.2.** Represente o conjunto $A=\{x\in\mathbb{R}: f(x)=2 \wedge 0<x<2\pi\}$ em extensão.

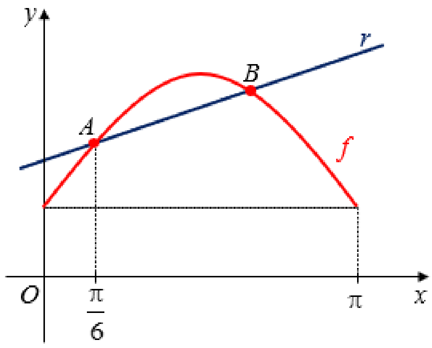
**3.3.** Calcule $f(\alpha)$, sabendo que $\alpha\in\left]-\pi,\ 0\right[$ e que $\cos(-\pi-\alpha)=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Resolva esta questão sem recorrer à calculadora.

**3.4.** Na figura está representada, num referencial $xOy$, parte do gráfico da função $f$ bem como a reta $r$ que passa nos pontos $A$ e $B$.

Sabe-se que:

- os pontos $A$ e $B$ pertencem ao gráfico de $f$ sendo $\frac{\pi}{6}$ a abcissa de $A$;
- a reta $r$ tem declive igual a $\frac{1}{2}$.




Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto $B$.

Apresente o valor obtido arredondado às centésimas.

Na sua resposta deve:

- apresentar a equação que lhe permite resolver o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.

**4.** Considere a sucessão $(a_n)$ definida por $a_n=n^2-9n$.

Sendo $A$ o conjunto dos termos de $(a_n)$, qual é o conjunto dos minorantes de $A$?

**5.** Seja $(u_n)$ a sucessão a seguir definida por recorrência.

$$\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=u_n+2n \quad , \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Qual é o terceiro termo da sucessão?

**(A)** 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7

**6.** Considere a sucessão $(u_n)$ de termo geral $u_n = \frac{2n-3}{n+1}$.

**6.1.** Averigue se $\frac{19}{12}$ é termo da sucessão.

**6.2.** Estude a sucessão $(u_n)$ quanto à monotonia.

**7.** De uma progressão aritmética $(a_n)$ sabe-se que $a_2 = -4$ e $a_{10} = 0$.

**7.1.** Determine a expressão do termo geral de $(a_n)$.

**7.2.** Sabe-se que que a soma dos primeiros $N$ termos de $(a_n)$ é igual a 54.

Qual é o valor de $N$?

**(A)** $-8$ **(B)** 27 **(C)** 54 **(D)** 100

**8.** Seja $(v_n)$ a progressão geométrica definida por $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Em qual das opções seguintes se encontra o valor da soma dos termos consecutivos de $(v_n)$, do quinto ao vigésimo termo?

**(A)** $2-\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$

**(B)** $\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{2}\right)^{19}$

**(C)** $8\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{19}\right)$

**(D)** $\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{15}\right)$

**9.** Calcule:

**9.1.** $\lim \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+1}}$

**9.2.** $\lim \frac{\sin(n)}{-n-2}$

**FIM**

## COTAÇÕES

| Item | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cotação (em pontos) | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **1.1.** | **1.2.** | **2.** | **3.1.** | **3.2.** | **3.3.** | **3.4.** | **4.** | **5.** | **6.1.** | **6.2.** | **7.1.** | **7.2.** | **8.** | **9.1.** | **9.2.** | **Total** |
| 14 | 14 | 10 | 12 | 14 | 14 | 14 | 14 | 10 | 12 | 12 | 12 | 10 | 10 | 14 | 14 | **200** |

**Proposta de resolução**

**1.**

**1.1.** Como é paralelo ao plano *ABG*, o plano *CDH* é da forma $6x+2y-3z+d=0,\ d\in\mathbb{R}$.

Dado que o ponto $H(-2,-5,1)$ pertence ao plano *CDH*, tem-se:

$$6\times(-2)+2\times(-5)-3\times1+d=0\Leftrightarrow-12-10-3+d=0\Leftrightarrow d=25$$

Logo, uma equação cartesiana do plano *HCD* é:

$6x+2y-3z+25=0$ (c. q. m.)

**1.2.** O ponto *G* é o ponto de interseção da reta *HG* com o plano *ABG*.

Um vetor diretor da reta *HG* é o vetor normal ao plano *ABG* de coordenadas $(6,2,-3)$.

Assim, uma equação vetorial da reta *HG* é:

$$(x,y,z)=(-2,-5,1)+k(6,2,-3),\ k\in\mathbb{R}$$

O ponto *G* tem coordenadas

$(-2+6k\,,-5+2k\,,1-3k)$ para determinado $k\in\mathbb{R}$

Como o ponto *G* pertence ao plano *ABG*, tem-se:

$$6(-2+6k)+2(-5+2k)-3(1-3k)-24=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow-12+36k-10+4k-3+9k-24=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 49k=49\Leftrightarrow k=1$$

Logo, o ponto *G* tem coordenadas:

$$(-2+6\times1\,,-5+2\times1\,,1-3\times1)=(4\,,-3\,,-2)$$

**2.** $A(\cos\alpha\,,\sin\alpha)$

Como $\tan(\alpha)=2$ (ordenada do ponto *D*), tem-se:

$$1+2^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow5=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$ $\left|\ 1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\right.$

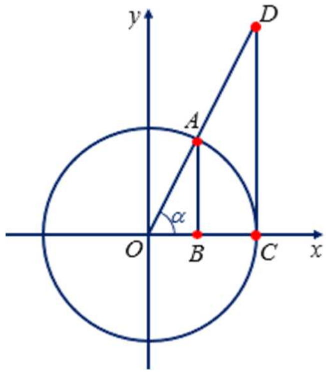
Como $\alpha\in\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$, onde $\cos\alpha>0$, então $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$$\tan(\alpha)=2\Leftrightarrow\frac{\sin\alpha}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=2\Leftrightarrow\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$ $\left|\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right.$

Logo, $A\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\,,\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

Em alternativa,

$A\left(\overline{OB}\,,\overline{AB}\right)$




$\overline{CD}=2$ e $\overline{OC}=\overline{OA}=1$

$\overline{OD}^2=\overline{OC}^2+\overline{CD}^2=1^2+2^2=5$

Como $\overline{OD}>0$, vem $\overline{OD}=\sqrt{5}$.

Os triângulos $[OBA]$ e $[OCD]$ são semelhantes (critério AA).

$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{OC}}{\overline{OB}}=\dfrac{\overline{OD}}{\overline{OA}}$

Logo, $\dfrac{2}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{\overline{OB}}=\dfrac{\sqrt{5}}{1}\Leftrightarrow \overline{AB}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\wedge\overline{OB}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AB}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\wedge\overline{OB}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$A\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

**Resposta:** (C)

**3.**

**3.1.** $f(x)=1-2\cos\left(\dfrac{2x-3\pi}{2}\right)=1-2\cos\left(\dfrac{2x}{2}-\dfrac{3\pi}{2}\right)=$

$=1-2\cos\left(x-2\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=$

$=1-2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=1+2\sin x$ (c. q. m.)

**3.2.** $f(x)=2\wedge 0<x<2\pi\Leftrightarrow 1+2\sin x=2\wedge 0<x<2\pi\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x=\dfrac{1}{2}\wedge 0<x<2\pi\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}\vee x=\pi-\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}\vee x=\dfrac{5\pi}{6}$

Logo, $A=\left\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

**3.3.** $f(\alpha)=1+2\sin\alpha$

$\cos(-\pi-\alpha)=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\Leftrightarrow\cos(\pi+\alpha)=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\Leftrightarrow\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$$\sin^2\alpha + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \frac{5}{9} = 1 \Leftrightarrow \qquad \left|\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{5}{9} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \sin\alpha = \pm\frac{2}{3}$$

Como $\alpha \in \left]-\pi, 0\right[$ e $\cos\alpha < 0$, então $\alpha \in 3.^{\text{o}}$ Q., em que $\sin\alpha < 0$, pelo que $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$.

Assim, $f(\alpha) = 1 + 2\times\left(-\frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$.

**3.4.** $f(x) = 1 + 2\sin x$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2\times\frac{1}{2} = 1 + 1 = 2$;

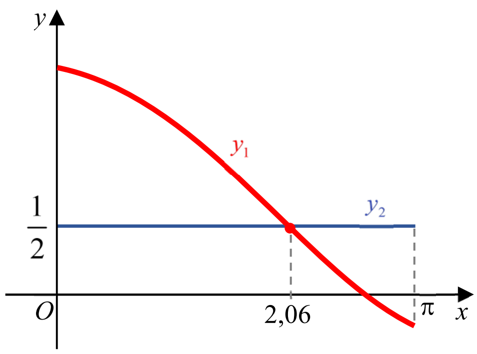
$A\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$; $\quad B(x, f(x))$

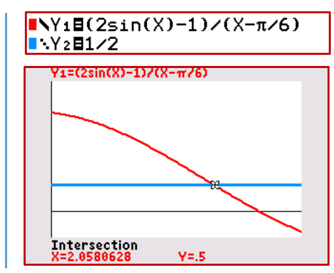
Declive da reta $r = \dfrac{f(x) - 2}{x - \frac{\pi}{6}} = \dfrac{1 + 2\sin x - 2}{x - \frac{\pi}{6}} = \dfrac{2\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$

Sendo $h(x) = \dfrac{2\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$, a abcissa de $B$ é a solução da equação $h(x) = \frac{1}{2}$.

Recorrendo à calculadora gráfica, fazendo $y_1 = \dfrac{2\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$ e $y_2 = \frac{1}{2}$, determinou-se, no intervalo $\left]\frac{\pi}{6}, \pi\right[$, a abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos.

Foi obtido o seguinte resultado:

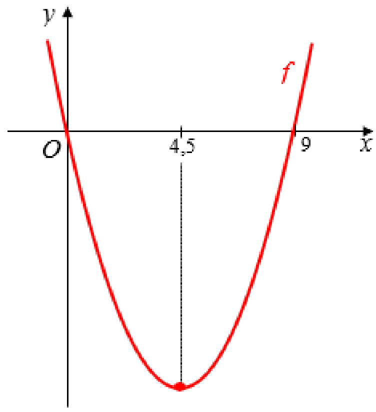



Portanto, a abcissa de $B$ é, aproximadamente, igual a 2,06.

**4.** $a_n = 0 \Leftrightarrow n^2 - 9n = 0 \Leftrightarrow n(n-9) = 0 \Leftrightarrow n = 0 \vee n = 9$

A função real de variável real *f*, definida por $f(x) = x^2 - 9x$, tem mínimo absoluto quando $x = 4,5$, pelo que a sucessão $(a_n)$ tem mínimo absoluto quando $n = 4$ e/ou $n = 5$.




$a_4 = 4^2 - 9 \times 4 = 16 - 36 = -20$

$a_5 = 5^2 - 9 \times 5 = 25 - 45 = -20$

Portanto, o menor termo da sucessão $(a_n)$ é $-20$.

Logo, o conjunto dos minorantes de $(a_n)$ é $]-\infty, -20]$.

**5.** $u_1 = 1$

$u_2 = u_1 + 2 \times 1 = 1 + 2 = 3$

$u_3 = u_2 + 2 \times 2 = 3 + 4 = 7$

**Resposta: (D)**

**6.**

**6.1.** $u_n = \frac{19}{12} \Leftrightarrow \frac{2n-3}{n+1} = \frac{19}{12} \Leftrightarrow 12(2n-3) = 19(n+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 24n - 36 = 19n + 19 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5n = 55 \Leftrightarrow n = 11$

Logo, $\frac{19}{12}$ é o 11.º termo da sucessão.

**6.2.** $u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)-3}{n+1+1} - \frac{2n-3}{n+1} = \frac{2n-1}{n+2} - \frac{2n-3}{n+1} =$

$= \frac{(2n-1)(n+1)}{n+2} - \frac{(2n-3)(n+2)}{n+1} =$

$= \frac{2n^2 + 2n - n - 1 - (2n^2 + 4n - 3n - 6)}{(n+2)(n+1)} =$

$= \frac{2n^2 + 2n - n - 1 - 2n^2 - 4n + 3n + 6}{(n+2)(n+1)} =$

$= \frac{5}{(n+2)(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, a sucessão $(u_n)$ é crescente.

**7.**

**7.1.** $a_{10} = a_2 + 8r \Leftrightarrow 0 = -4 + 8r \Leftrightarrow 4 = 8r \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$

Trata-se de uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$.

A expressão do termo geral de $(a_n)$ é:

$$a_n = a_{10} + (n-10)\times\frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2}n - 5 = \frac{1}{2}n - 5$$

**7.2.** $S_N = 54 \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_N}{2}\times N = 54 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}N-5}{2}\times N = 54 \Leftrightarrow \frac{-\frac{19}{2}+\frac{1}{2}N}{2}\times N = 54 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{N-19}{4}\times N = 54 \Leftrightarrow N^2 - 19N - 216 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow N = 27 \vee N = -8$$

Cálculos auxiliares

$a_1 = \frac{1}{2}\times 1 - 5 = -\frac{9}{2}$

$N = \frac{19 \pm \sqrt{19^2 + 4\times 216}}{2}$

$N = \frac{19 \pm 35}{2}$

Como $N \in \mathbb{N}$, $N = 27$.

**Resposta: (B)**

**8.** $$S = v_5 \times \frac{1 - r^{20-5+1}}{1-r} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{16}}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{16}}{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{16}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$$

Cálculos auxiliares

$r = \frac{1}{2}$

$V_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

**Resposta: (B)**

**9.**

**9.1.** $$\lim\frac{2n+3}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\frac{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}} = \lim\frac{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} =$$

$$= \lim\frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{2+0}{\sqrt{1+0}} = 2$$

**9.2.** $$\lim\frac{\sin(n)}{-n-2} = \lim\left[\frac{1}{-n-2}\times\sin(n)\right] = 0,$$

pois $\lim\frac{1}{-n-2} = 0$ e a sucessão definida por $\sin(n)$ é limitada $\left(\forall n \in \mathbb{N}, -1 \le \sin(n) \le 1\right)$.