TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

1.

1.1. $A\left(\underbrace{\cos\alpha}_{+}, \underbrace{\text{sen}\alpha}_{-}\right)$ $B\left(1, \underbrace{\text{tg}\,\alpha}_{-}\right)$ $C\left(0, \underbrace{\text{tg}\,\alpha}_{-}\right)$ $D(0, \text{sen}\,\alpha)$

$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AD}+\overline{CB}}{2} \times \overline{DC} =$

$= \frac{\cos\alpha + 1}{2} \times (-\text{tg}\,\alpha + \text{sen}\,\alpha) =$

$= \frac{1}{2}(\cos\alpha + 1)(\text{sen}\,\alpha - \text{tg}\,\alpha) =$

$= \frac{1}{2}(\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha - \cos\alpha\,\text{tg}\,\alpha + \text{sen}\,\alpha - \text{tg}\,\alpha) =$

$= \frac{1}{2}(\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\alpha - \text{tg}\,\alpha) =$

$= \frac{1}{2}(\text{sen}\,\alpha\cos\alpha - \text{tg}\,\alpha)$

1.2. $\cos(-\alpha) = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha + \frac{16}{25} = 1$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{9}{25}$

$\Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\frac{3}{5}$

Como $\alpha \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$, $\text{sen}\,\alpha = -\frac{3}{5}$.

$\text{tg}\,\alpha = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$

$\frac{1}{2}(\text{sen}\,\alpha\cos\alpha - \text{tg}\,\alpha) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{4}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{12}{25} + \frac{3}{4}\right) =$

$= \frac{1}{2} \times \frac{27}{100} =$

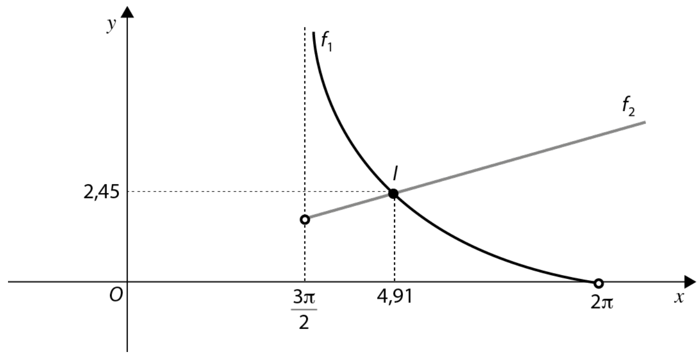
$= \frac{27}{200}$

1.3. $A_{\text{setor circular}} = \frac{\alpha r^2}{2} = \frac{\alpha \times 1^2}{2} = \frac{\alpha}{2}$

$\frac{1}{2}(\text{sen}\,\alpha\cos\alpha - \text{tg}\,\alpha) = \frac{\alpha}{2}; \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Usando x como variável independente:

$f_1(x) = \frac{1}{2}(\text{sen}\, x \cos x\ - \text{tg}\, x)$ $\qquad$ $f_2(x) = \frac{x}{2}$



I(4,91; 2,45)

Assim, $\alpha \approx 4{,}91$.

2. Opção (C)

$$\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} = \pi$$

3. $x^2 + (y-4)^2 = 16$ representa a circunferência de centro em *C*(0, 4) e raio 4.

3.1. Seja $P(a, 2)$ tal que $O\hat{C}P = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CP}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CP}}\right) = \frac{\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CP}}{\|\overrightarrow{CO}\| \times \|\overrightarrow{CP}\|} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{8}{4 \times \sqrt{a^2+4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+4} = 4$$

$\Leftrightarrow a^2 + 4 = 16$, pois os dois membros da equação anterior são não negativos.

$$\Leftrightarrow a^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow a = \pm 2\sqrt{3}$$

Cálculos auxiliares

- $\overrightarrow{CO} = (0, -4)$
- $\|\overrightarrow{CO}\| = 4$
- $\overrightarrow{CP} = (a, 2) - (0, 4) =$
  $= (a, -2)$
- $\|\overrightarrow{CP}\| = \sqrt{a^2+4}$
- $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CP} = 0 + 8 = 8$

Como *P* pertence ao 2.º quadrante, então $a = -2\sqrt{3}$.

A abcissa do ponto *P* é igual a $-2\sqrt{3}$.

3.2. $A(x_A, 5)$

$(x_A)^2 + (5-4)^2 = 16 \Leftrightarrow (x_A)^2 = 15 \Leftrightarrow x_A = \pm\sqrt{15}$

Como A pertence ao 1º Q, então $x_A = \sqrt{15}$.

$\overrightarrow{AC} = (0,4) - (\sqrt{15}, 5) = (-\sqrt{15}, -1)$

$m_{AC} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$

$m_t = -\sqrt{15}$

$t\colon\ y = -\sqrt{15}x + b$

Como $A(\sqrt{15},\ 5)$ pertence à reta, vem que:

$5 = -\sqrt{15} \times \sqrt{15} + b \Leftrightarrow 5 + 15 = b \Leftrightarrow 20 = b$

$t\colon\ y = -\sqrt{15}x + 20$

$B\ (b',\ 0)$

$0 = -\sqrt{15}\, b' + 20 \Leftrightarrow b' = \frac{20}{\sqrt{15}}$

$\Leftrightarrow b' = \frac{20\sqrt{15}}{15}$

$\Leftrightarrow b' = \frac{4\sqrt{15}}{3}$

$B\left(\frac{4\sqrt{15}}{3},\ 0\right)$

$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{AB}}{2} = \frac{r \times \|\overrightarrow{AB}\|}{2} = \frac{4 \times \frac{4\sqrt{15}}{3}}{2} = \frac{8\sqrt{15}}{3}$ u.a.

Cálculos auxiliares

- $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{4\sqrt{15}}{3}, 0\right) - (\sqrt{15}, 5) = \left(\frac{\sqrt{15}}{3}, -5\right)$
- $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\frac{15}{9} + 25} = \sqrt{\frac{80}{3}} = \frac{4\sqrt{15}}{3}$

4. O argumento da função cosseno toma valores de um intervalo com amplitude superior a 2π.

O contradomínio da função definida por $y = \cos(\pi t + \pi)$ é [–1, 1].

O contradomínio da função definida por $y = 2\cos(\pi t + \pi)$ é [–2, 2].

O contradomínio da função definida por $y = 3 + 2\cos(\pi t + \pi)$ é [1, 5].

Logo, *A* = 5 – 1 = 4.

5.

5.1. Opção (C)

Sabemos que $\vec{n}(-2, -3, 6)$ é um vetor normal ao plano da base do cone.

Se a reta é paralela ao plano, qualquer vetor diretor da reta terá de ser perpendicular a qualquer vetor do plano.

Assim:

- $(-2,-3,6)$ é um vetor diretor da reta definida em (A), o que exclui esta opção;
- $(-2,-3,6)\cdot(6,0,-2) = -12-12 = -24 \neq 0$, o que exclui a opção (B);
- $(-2,-3,6)\cdot(3,2,2) = -6-6+12 = 0$

  $(0,0,6) = (-6,-4,2) + k(3,2,2)$

  $$\begin{cases} 0 = -6+3k \\ 0 = -4+2k \\ 6 = 2+2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 2$$

  Assim, (C) é a opção correta.
- $(-2,-3,6)\cdot(3,4,3) = -6-12+18 = 0$

  $(0,0,6) = (-6,-4,2) + k(3,4,3)$

  $$\begin{cases} 0 = -6+3k \\ 0 = -4+4k \\ 6 = 2+3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 1 \\ k = \frac{4}{3} \end{cases}$$ Condição impossível.

  A reta definida na opção (D) não contém o ponto *V*, o que exclui essa opção.

5.2. V_A: $(x,y,z) = (0,0,6) + k(-2,-3,6)$, com $k \in \mathbb{R}$

$\underbrace{(-2k,-3k,6+6k)}_{\text{Ponto genérico de } V_A}$, com $k \in \mathbb{R}$

$$-2(-2k) - 3(-3k) + 6(6+6k) + 13 = 0 \Leftrightarrow 4k + 9k + 36 + 36k + 13 = 0$$
$$\Leftrightarrow 49k = -49$$
$$\Leftrightarrow k = -1$$

$A(2,3,0)$

$\overrightarrow{AV} = (0,0,6) - (2,3,0) = (-2,-3,6)$

$h = \|\overrightarrow{AV}\| = \sqrt{4+9+36} = 7$

$$\frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times 7 = \frac{28\pi}{3} \Leftrightarrow 7r^2 = 28 \Leftrightarrow r^2 = 4 \Leftrightarrow r = \pm 2$$

Como $r > 0$, então $r = 2$.

6. Opção (B)

Podemos definir a sucessão (v_n) desta forma:

$$v_n = \begin{cases} -n - 2023 & \text{se} \quad n \text{ é ímpar} \\ n + 2023 & \text{se} \quad n \text{ é par} \end{cases}$$

Temos que:

- $v_1 = -2024$
- $v_2 = 2025$
- $v_3 = -2026$

Como $v_1 < v_2$ e $v_2 > v_3$, então (v_n) é não monótona.

Vejamos se (v_n) é limitada:

(v_n) é limitada se existir um número real L tal que $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq L$.

Seja L um número qualquer:

$|v_n| \leq L \Leftrightarrow \left|\frac{n+2023}{(-1)^n}\right| \leq L \Leftrightarrow n + 2023 \leq L \Leftrightarrow n \leq L - 2023$

Existe uma infinidade de números naturais (qualquer número superior a $L - 2023$) que não satisfazem a condição $n \leq L - 2023$, logo (v_n) não é limitada.

$\lim(n + 2023) = +\infty$ e $\lim(-n - 2023) = -\infty$, logo não existe lim v_n.

7. Para $n \leq 4$: $-1 \leq a_n \leq 1$

Para $n > 4$: $a_n = 2 - \frac{1}{n+2}$

Cálculo auxiliar	
$2n+3$	$n+2$
$-2n-4$	2
-1	

Tem-se que:

$n > 4 \Leftrightarrow n + 2 > 6 \Leftrightarrow \frac{1}{n+2} < \frac{1}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{n+2} > -\frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow 2 - \frac{1}{n+2} > \frac{11}{6}$

Por outro lado, para todo o $n \in \mathbb{N}$:

$\frac{1}{n+2} > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{n+2} < 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{n+2} < 2$

Podemos concluir que, para $n > 4$, tem-se que $\frac{11}{6} < a_n < 2$.

Logo, $-1 < a_n < 2, \forall\, n \in \mathbb{N}$, ou seja, (a_n) é limitada.

8. $u_5 = 5 \Leftrightarrow u_1 + 4r = 5$

$3\,u_{11} = 4\,u_7 \Leftrightarrow 3(u_1 + 10r) = 4(u_1 + 6r) \Leftrightarrow 3u_1 + 30r = 4u_1 + 24r$

$\Leftrightarrow 6r = u_1$

Assim:

$\begin{cases} u_1 + 4r = 5 \\ u_1 = 6r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6r + 4r = 5 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ u_1 = 3 \end{cases}$

O termo geral da sucessão (u_n) é $u_n = 3 + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n + \frac{5}{2}$.

$u_p = \frac{1}{2}p + \frac{5}{2}$

$S_p = 45 \Leftrightarrow \frac{u_1+u_p}{2} \times p = 45 \Leftrightarrow \frac{3+0{,}5p+2{,}5}{2} \times p = 90$

$\Leftrightarrow (5{,}5 + 0{,}5p)p = 90$

$\Leftrightarrow 0{,}5p^2 + 5{,}5p - 90 = 0$

$\Leftrightarrow p^2 + 11p - 180 = 0$

$$\Leftrightarrow p = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 4 \times (-180)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{-11 \pm 29}{2}$$

$\Leftrightarrow p = -20 \;\vee\; p = 9$

Como $p \in \mathbb{N}$, então $p = 9$.

9. Opção (C)

$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{(\sqrt{3})^n}$ representa a soma dos $n+1$ primeiros termos consecutivos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é igual a 1 e a razão é $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Assim, podemos escrever (u_n) da forma:

$$u_n = 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}$$

$$\lim u_n = \lim \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = \frac{1-0}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

10.

10.1. Opção (B)

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

Se $\lim(x_n) = 1^-$, então $\lim f(x_n) = +\infty$.

Assim:

- $\lim \frac{n+2}{n+1} = \lim \frac{n+1+1}{n+1} = \lim \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = 1^+$
- $\lim \frac{n+2}{n+3} = \lim \frac{n+3-1}{n+3} = \lim \left(1 - \frac{1}{n+3}\right) = 1^-$
- $\lim \left(-1 + \frac{1}{2^n}\right) = -1^+$
- $\lim (n^2 + \sqrt{n}) = +\infty$

10.2. $\lim f(a_n) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -6$, pois $\lim a_n = \lim \frac{n^2+2+1}{n^2+2} = \lim\left(1 + \frac{1}{n^2+2}\right) = 1^+$.

$\lim f(b_n) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 0$, pois $\lim b_n = \lim\left(3 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 3^-$.

$\lim f(c_n) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -5$, pois $\lim c_n = \lim\left(-1 + \frac{(-1)^{2n}}{n^3}\right) = \lim\left(-1 + \frac{1}{n^3}\right) = -1^+$