TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

1. Opção (B)

$$P(x)=\frac{(\operatorname{sen}x-\cos x)^2}{(\cos^2x+\operatorname{sen}^2x)(1-\operatorname{tg}x)^2}=\frac{\operatorname{sen}^2x-2\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2x}{1\times(1-2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2x)}=$$

$$=\frac{1-2\operatorname{sen}x\cos x}{\frac{1}{\cos^2x}-2\operatorname{tg}x}=$$

$$=\frac{1-2\operatorname{sen}x\cos x}{\frac{1}{\cos^2x}-2\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}=$$

$$=\frac{1-2\operatorname{sen}x\cos x}{\frac{1-2\operatorname{sen}x\cos x}{\cos^2x}}=$$

$$=\cos^2x$$

2. Seja *D* a projeção ortogonal do ponto *B* sobre o eixo Ox.

2.1. $A_{[ABC]}=A_{[AOB]}+A_{[AOC]}=\frac{\overline{OA}\times\overline{BD}}{2}+\frac{\overline{OA}\times\overline{AC}}{2}=$

$$=\frac{1\times\operatorname{sen}\alpha}{2}+\frac{1\times(-\operatorname{tg}\alpha)}{2}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{2}$$

2.2. $\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+2\operatorname{sen}(2021\pi-\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 3\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{6}$$

Como $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, vem que:

$\frac{1}{36}+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{35}{36}\Leftrightarrow\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{35}}{6}$

Como $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, então $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{35}}{6}$.

Como $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, vem que:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{1}{6}}{-\frac{\sqrt{35}}{6}}=-\frac{1}{\sqrt{35}}=-\frac{\sqrt{35}}{35}$$

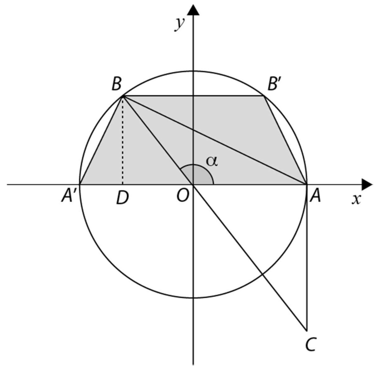
Assim:

$$A_{[ABC]}=\frac{\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{2}=\frac{\frac{1}{6}-\left(-\frac{\sqrt{35}}{35}\right)}{2}=\frac{\frac{35+6\sqrt{35}}{210}}{2}=$$

$$=\frac{35+6\sqrt{35}}{420}$$

2.3. $A_{[AA'BB']} = \frac{\overline{AA'}+\overline{BB'}}{2} \times \overline{BD} = \frac{2+(-2\cos\alpha)}{2} \times \text{sen}\alpha =$

$= (1 - \cos\alpha) \times \text{sen}\alpha$

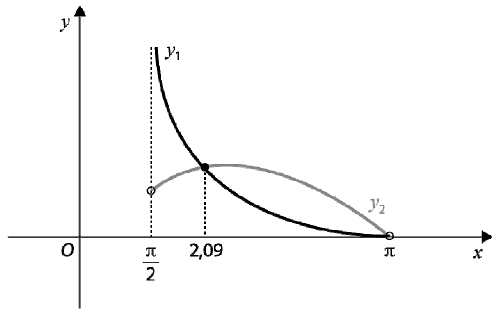


Pretende-se o valor de α tal que $A_{[ABC]} = A_{[AA'BB']}$, isto é, o valor de α tal que $\frac{\text{sen}\alpha - \text{tg}\alpha}{2} = (1 - \cos\alpha) \times \text{sen}\alpha$.

Recorrendo à calculadora gráfica, determinemos o ponto de interseção das curvas y_1 e y_2, onde:

$y_1 = \frac{\text{sen}\,x - \text{tg}\,x}{2}$

$y_2 = (1 - \cos x) \times \text{sen}\,x$



α ≈ 2,09 rad

2.4. Pretende-se os valores de $x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ tais que $f(x) = g(x)$. Assim:

$\frac{\text{sen}x - \text{tg}x}{2} = \text{sen}x\cos x - \frac{\text{tg}x}{2} \Leftrightarrow \text{sen}x - \text{tg}x = 2\text{sen}x\cos x - \text{tg}x$

$\Leftrightarrow \text{sen}x - 2\text{sen}x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \text{sen}x(1 - 2\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \text{sen}x = 0 \ \vee \ 1 - 2\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \text{sen}x = 0 \ \vee \ \cos x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = k\pi \ \vee \ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

3. Opção (C)

$(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 =$

$= 4^2 + 2 \times (-1) + 5^2 =$

$= 39$

Como $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$, então $39 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$. Logo, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{39}$.

$(\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} - \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 =$

$= 4^2 - 2 \times (-1) + 5^2 =$

$= 43$

Logo, $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{43}$.

4.

4.1. Opção (A)

Sabe-se que a reta t é tangente à circunferência de diâmetro $[AB]$ no ponto *A*, logo as retas t e AB são perpendiculares. Assim, $m_t = -\frac{1}{m_{AB}}$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 4) - (3, -1) = (-4, 5)$

$m_{AB} = -\frac{5}{4}$

$m_t = \frac{4}{5}$

Como a reta r é paralela à reta t, então os seus declives são iguais.

A equação reduzida da reta r é, então, da forma $y = \frac{4}{5}x + b$.

Como $C \in r$, vem que:

$\frac{3}{2} = \frac{4}{5} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{2} - \frac{4}{5} \Leftrightarrow b = \frac{7}{10}$

A equação reduzida da reta r é $y = \frac{4}{5}x + \frac{7}{10}$.

Cálculo auxiliar

C é o ponto médio de [*AB*]. Assim:

$C = \left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{-1+4}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$

4.2. Como *C* é o centro da circunferência e [*AB*] é o seu diâmetro, então a reta *AC* é a reta *AB*.

Assim, $m_{AC} = -\frac{5}{4}$ e, como $\text{tg}\,\alpha = m_{AC}$, vem que $\text{tg}\,\alpha = -\frac{5}{4}$.

Como $1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, vem que:

$$1 + \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{41}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{41}$$

Como $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, vem que:

$$\text{sen}^2\alpha + \frac{16}{41} = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{16}{41} \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{25}{41} \Leftrightarrow \text{sen}\alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}} \ \vee \ \text{sen}\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

Como α é a inclinação da reta *AC*, $\alpha \in [0, \pi[$, e como $\text{tg}\alpha < 0$, então $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Assim, $\text{sen}\alpha > 0$. Logo, $\text{sen}\alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}$.

4.3. $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{CB}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{CB}\ \overrightarrow{CD}}\right) =$

$= r \times r \times \cos(\pi - \beta) =$

$= \frac{\sqrt{41}}{2} \times \frac{\sqrt{41}}{2} \times \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) =$

$= \frac{41}{4} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= -\frac{41\sqrt{3}}{8}$

Cálculos auxiliares

Seja r o raio da circunferência e β a amplitude do ângulo *ACD:*

- $r = \|\overrightarrow{CB}\| = \|\overrightarrow{CD}\| = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 5^2}}{2} = \frac{\sqrt{16+25}}{2} = \frac{\sqrt{41}}{2}$

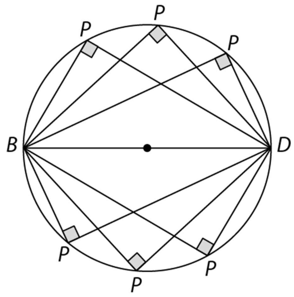
- $A_{\text{setor circular}} = \frac{\beta \times \left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2}{2} = \frac{41}{8}\beta$

Logo:

$\frac{41\pi}{48} = \frac{41}{8}\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{8}{48}\pi \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{6}$

4.4. Opção (C)

Como um ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo reto, verifica-se que todos os pontos *P* que satisfazem a condição $\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PD} = 0$ são pontos pertencentes a uma circunferência de diâmetro [*BD*].



5.

5.1. Opção (D)

$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 10$

Sabemos que $P(a, 3, 1)$, com $a < 0$, pertence à superfície esférica, logo:

$(a+1)^2 + (3-2)^2 + (1-1)^2 = 10 \Leftrightarrow (a+1)^2 = 9$

$\Leftrightarrow a + 1 = 3 \quad \vee \quad a + 1 = -3$

$\Leftrightarrow a = 2 \quad \vee \quad a = -4$

Como $a < 0$, então $a = -4$.

Assim, $P(-4, 3, 1)$.

Seja C o centro da superfície esférica.

$\overrightarrow{CP}$ é um vetor normal ao plano α, logo:

$\overrightarrow{CP} = (-4, 3, 1) - (-1, 2, 1) = (-3, 1, 0)$

Logo, uma equação do plano tangente à superfície esférica no ponto P é da forma:

$$-3x + y + d = 0$$

Como *P* pertence ao plano, vem que $-3 \times (-4) + 3 + d = 0$ e, portanto, $d = -15$.

Assim, $-3x + y - 15 = 0$ é uma equação do plano pretendido, o que é equivalente a $3x - y + 15 = 0$.

5.2. $C(-1, 2, 1)$ e $C'(-1, -2, 1)$

Tem-se que $C'\hat{O}C = (\widehat{\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OC}})$ e $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OC}}\right) = \frac{\overrightarrow{OC'}.\overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OC'}\| \times \|\overrightarrow{OC}\|}$.

Então:

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OC}}\right) = \frac{(-1, -2, 1).(-1, 2, 1)}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OC}}\right) = \frac{1 - 4 + 1}{6}$

$\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OC}}\right) = -\frac{1}{3}$

Logo, $\left(\widehat{\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OC}}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$, isto é, $\left(\widehat{\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OC}}\right) \approx 109{,}5°$.