Teste de Matemática A

2020 / 2021

Teste N.º 2

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

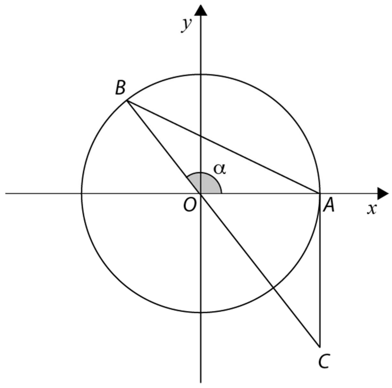
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere a expressão $P(x) = \frac{(\text{sen}\, x - \cos x)^2}{(\cos^2 x + \text{sen}^2 x)(1 - \text{tg}\, x)^2}$.

Para todo o x onde a igualdade tem significado, podemos concluir que $P(x)$ é igual a:

(A) $\frac{1}{\cos^2 x}$ **(B)** $\cos^2 x$ **(C)** $\cos x$ **(D)** $-\cos x$

2. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica.



Sabe-se que:

- os pontos A e B são pontos da circunferência;
- o ponto A pertence ao eixo das abcissas;
- a reta AC é tangente à circunferência no ponto A;
- o ponto O pertence à reta BC;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

2.1. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ pode ser dada, em função de α, por $A(\alpha) = \frac{\text{sen}\, \alpha - \text{tg}\, \alpha}{2}$.

2.2. Considere o valor de α para o qual se tem $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 2\text{sen}(2021\pi - \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Para este valor de α, e sem recorrer à calculadora a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, determine o valor exato da área do triângulo $[ABC]$.

2.3. Considere os pontos A' e B', dos quais se sabe que são os pontos simétricos de A e de B, respetivamente, relativamente ao eixo das ordenadas.

Sabe-se que existe um valor de α para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é igual à área do trapézio $[AA'BB']$.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de α.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de α, em radianos, com aproximação às centésimas.

2.4. Considere agora as funções f e g, de domínio $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, definidas por:

$$f(x) = \frac{\text{sen}\, x - \text{tg}\, x}{2} \quad \text{e} \quad g(x) = \text{sen}\, x \cos x - \frac{\text{tg}\, x}{2}$$

Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, determine uma expressão geral para as abcissas dos pontos de interseção dos gráficos das funções f e g.

3. De dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabe-se que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 5$ e $\vec{u} \,.\, \vec{v} = -1$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = \sqrt{39}$

(B) $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 39$

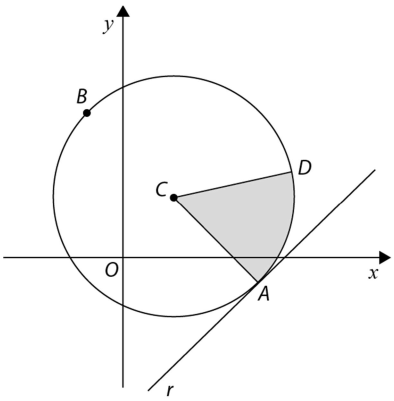
(C) $(\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = 43$

(D) $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 43$

4. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy, a circunferência de centro C e de diâmetro $[AB]$ e a reta t tangente à circunferência no ponto A.

Sabe-se ainda que:

- as coordenadas dos pontos A e B são, respetivamente, $(3, -1)$ e $(-1, 4)$;
- a área do setor circular representado a sombreado na figura é $\frac{41\pi}{48}$.



4.1. Seja r a reta paralela à reta t e que passa no centro da circunferência.

Qual é a equação reduzida da reta r?

(A) $y = \frac{4}{5}x + \frac{7}{10}$

(B) $y = \frac{5}{4}x + \frac{1}{4}$

(C) $y = \frac{4}{5}x + \frac{23}{10}$

(D) $y = \frac{5}{4}x$

4.2. Seja α a inclinação da reta AC. Determine o valor exato de $\operatorname{sen} \alpha$.

Apresente o resultado sob a forma de fração com o denominador racionalizado.

4.3. Determine o valor exato do produto escalar $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

4.4. Qual é o lugar geométrico dos pontos P do plano que satisfazem a condição $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD} = 0$?

(A) Reta perpendicular à reta BD a passar em B.

(B) Reta perpendicular à reta BD a passar em D.

(C) Circunferência de diâmetro $[BD]$.

(D) Mediatriz do segmento de reta $[BD]$.

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação:

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=10$$

5.1. Seja P o ponto da superfície esférica de abcissa negativa, ordenada 3 e cota 1.

Considere o plano tangente à superfície esférica no ponto P. Uma equação desse plano poderá ser:

(A) $5x-5y-2z+37=0$

(B) $5x-5y-2z+7=0$

(C) $3x-y-3=0$

(D) $3x-y+15=0$

5.2. Seja C o centro da superfície esférica e seja C' o simétrico do ponto C relativamente ao plano xOz. Determine a amplitude do ângulo $C'OC$.

Apresente o resultado em graus, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

COTAÇÕES

Item												
Cotação (em pontos)												
1.	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**2.4.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**4.4.**	**5.1.**	**5.2.**	
10	20	20	25	25	10	10	20	20	10	10	20	**200**