Teste de Matemática A

2023 / 2024

Teste N.º 1

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

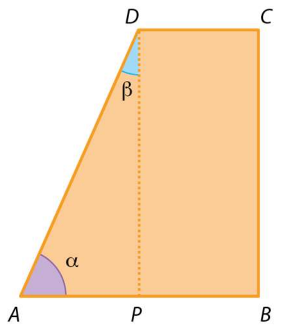
Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura ao lado está representado o trapézio retângulo $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- P é ponto médio de $[AB]$;
- $\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \sqrt{5}$;
- $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ é a amplitude, em radianos, do ângulo BAD;
- $\beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ é a amplitude, em radianos, do ângulo ADP.



Qual das seguintes opções é verdadeira?

(A) $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\sqrt{6}}{6}$ **(B)** $\operatorname{tg}(\alpha) = \sqrt{6}$ **(C)** $\operatorname{sen}(\beta) = \frac{\sqrt{6}}{6}$ **(D)** $\operatorname{tg}(\beta) = \sqrt{6}$

2. De um ângulo de amplitude α, sabe-se que $\alpha \in]-30°, 60°]$.

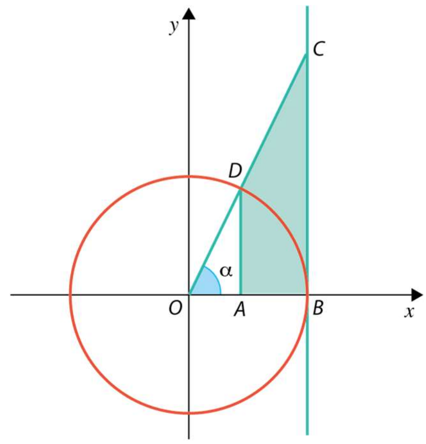
Em qual das seguintes opções está indicado o conjunto dos valores de k para os quais se tem $\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \frac{1 - \sqrt{3}k}{2}$?

(A) $\left]-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right]$ **(B)** $\left[\frac{\sqrt{3}}{3} - 1, 0\right[$ **(C)** $\left]\frac{\sqrt{3}}{3} - 1, 0\right]$ **(D)** $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right]$

3. Na figura estão representados, em referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica, o quadrilátero $[ABCD]$ e a reta de equação $x = 1$.

Sabe-se que:

- o ponto B tem coordenadas $(1, 0)$;
- o ponto C pertence à reta de equação $x = 1$;
- D é o ponto de interseção da semirreta $\dot{O}C$ com a circunferência trigonométrica;
- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox e tem a mesma abcissa que o ponto D;
- $B\hat{O}C = \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{3}$.



Determine o valor exato da área do quadrilátero $[ABCD]$.

Apresente o resultado na forma $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, a, b e $c \in \mathbb{N}$.

4. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a - 3 + b\,\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Sabe-se que $D'_f = [-4, 2]$.

Recorrendo a processos exclusivamente analíticos determine os valores de a e de b.

5. Considere a função f definida por:

$$f(x) = \frac{\text{tg}(x)}{\cos^2(x) - 1}$$

Considere as seguintes proposições:

(I) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi\, , k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(II) π é período da função f.

Em relação às proposições anteriores, podemos afirmar que:

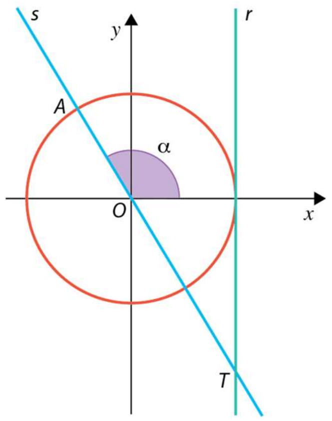
(A) são ambas verdadeiras.

(B) são ambas falsas.

(C) apenas (I) é verdadeira.

(D) apenas (II) é verdadeira.

6. Na figura ao lado estão representadas, em referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica e as retas r e s.



Sabe-se que:

- a reta r tem equação $x = 1$;
- o ponto A, situado no segundo quadrante, pertence à circunferência;
- o ponto T pertence à reta r e tem coordenadas $(1, -\sqrt{2})$;
- a reta s passa na origem do referencial e contém os pontos A e T;
- o ângulo de amplitude α tem, por lado origem, o semieixo positivo das abcissas e, por lado extremidade, a semirreta $\dot{O}A$ $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor exato de

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \times \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - \text{tg}(-\alpha)$$

7. Mostre que, para todo x onde a expressão tem significado, é válida a seguinte igualdade:

$$\frac{(\text{tg}^2 x+1)\,(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)}{\text{tg}^2 x} = \text{sen}^2 x$$

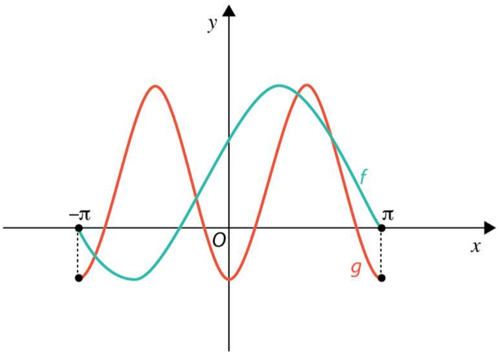
8. Considere, em $\mathbb{R}$, a equação trigonométrica $\cos^2 x = 1$.

Quantas soluções tem esta equação no intervalo $[0, 2023\pi[$?

(A) 2022 **(B)** 2023 **(C)** 1011 **(D)** 1012

9. Considere as funções f e g, ambas de domínio $[-\pi, \pi]$, representadas graficamente na figura ao lado e definidas por:

$f(x) = 2\cos\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)+1$ e $g(x) = -2\cos(2x)+1$



9.1 Para qualquer $x \in [-\pi, \pi]$, $g\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ é igual a:

(A) $2\cos(2x) - 2\text{sen}(x)$ **(B)** $2\text{sen}(2x) - 2\cos(x)$

(C) $2\cos(2x) + 2\text{sen}(x)$ **(D)** $2\text{sen}(2x) + 2\cos(x)$

9.2 Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, determine as abcissas dos pontos de interseção dos gráficos das funções f e g, no respetivo domínio.

9.3 Existem dois pontos P e Q pertencentes, respetivamente, aos gráficos de f e de g dos quais se sabe que:

- têm a mesma abcissa e esta é positiva;
- a ordenada de P é maior 2 unidades do que a ordenada de Q.

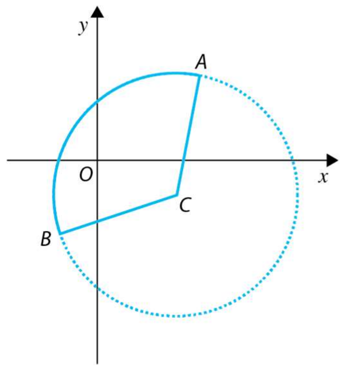
Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine um valor, aproximado às décimas, da abcissa de P e de Q.

Na sua resposta:

- reproduza, na folha de respostas, o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- apresente a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) relevante(s), arredondadas às centésimas.

10. Na figura está representada, em referencial o.n. Oxy, a circunferência de equação:

$$(x-2)^2+(y+1)^2=9$$

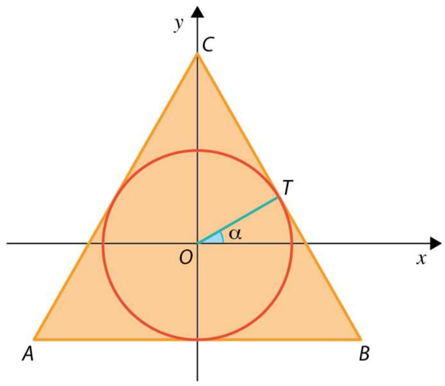


Sabe-se que:

- o ponto C é o centro da circunferência;
- A e B são dois pontos da circunferência;
- o arco de circunferência AB tem comprimento 2π.

Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, o valor exato da área do setor a que corresponde o arco de circunferência AB.

11. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy, uma circunferência trigonométrica de centro na origem do referencial e o triângulo isósceles $[ABC]$.



Sabe-se que:

- $\overline{AC}=\overline{BC}$;
- o vértice C pertence ao semieixo positivo Oy;
- o lado $[AB]$ é tangente à circunferência num ponto de abcissa nula e é paralelo ao eixo Ox;
- o lado $[BC]$ é tangente à circunferência no ponto T;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e o lado extremidade é a semirreta $\dot{O}T$ $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Prove que a área do triângulo $[ABC]$ é dado, em função de α, por

$$\frac{(\text{sen}\,\alpha+1)^2}{\text{sen}\,\alpha \times \cos\alpha}$$

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.1**	**9.2**	**9.3**	**10.**	**11.**	**Total**
10	10	20	18	10	18	18	10	10	20	20	18	18	**200**