



www.esffranco.edu.pt

(2023/2024)

4.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 17

2.º Período

07/03/2024

Duração: 90 minutos

Nome: _____

N.º: _____

Classificação:

O professor: _____

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleccione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Nos mundiais de desportos aquáticos que se realizaram, em fevereiro, em Doha (no Catar), foram distribuídas dezenas de medalhas de ouro aos atletas em competição.



WORLD AQUATICS
CHAMPIONSHIPS
DOHA 2024
بطولة العالم للألعاب المائية



Em relação a essas medalhas, concluiu-se que:

- 56% foram entregues a atletas da natação (as outras foram para atletas de águas livres, saltos, etc.);
- 37% foram entregues a atletas não europeus da natação;
- dos atletas que não eram da natação, $\frac{1}{3}$ eram europeus.

Seleciona-se, ao acaso, um atleta europeu presente nos mundiais que ganhou uma medalha de ouro.

Determine a probabilidade de esse atleta ser da natação.

Apresente o resultado na forma de percentagem, com arredondamento às décimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. Considere a função g , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2x}\right)$.

Sabe-se que o gráfico de g tem uma assíntota oblíqua.

Qual é o declive dessa assíntota?

(A) $\frac{\pi}{2}$

(B) $\frac{\pi}{4}$

(C) 2π

(D) π

3. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$.

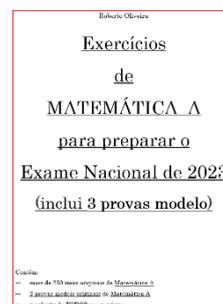
Qual é o declive da reta tangente ao gráfico de f num ponto de abcissa a do seu domínio?

(A) $2\cos^2 a - 1$

(B) $4\cos^2 a - 2$

(C) $4 - 2\operatorname{sen}^2 a$

(D) $2 - \operatorname{sen}^2 a$



4. Seja h a função, de domínio $\left] \frac{\pi}{2}, 2\pi \right[$, definida por $h(x) = \frac{\cos x}{2 - \sin x}$.

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

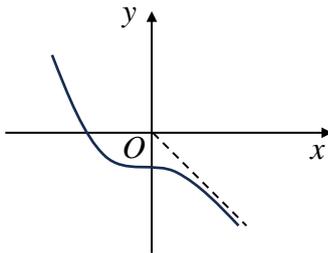
- 4.1. Mostre que existe, pelo menos, um ponto do gráfico de h cuja ordenada é igual a $-\frac{1}{3}$, no intervalo $\left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$.
- 4.2. Estude a função h quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

5. Seja f uma função, diferenciável em \mathbb{R} , tal que:

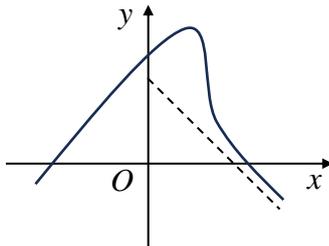
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$;
- $f'(x) > 0, \forall x \in]-\infty, 0[$.

Em cada um dos referenciais o.n. xOy seguintes, I, II e III, estão representadas parte do gráfico de uma função e a assíntota a esse gráfico.

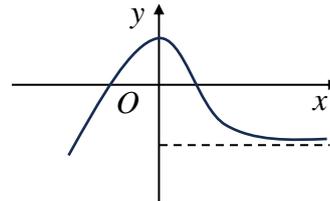
(I)



(II)



(III)



Justifique que em nenhum dos referenciais anteriores pode estar representada parte do gráfico da função f .

Na sua resposta, apresente, para cada um dos referenciais, uma razão que justifique a impossibilidade de nele estar representada parte do gráfico da função f .

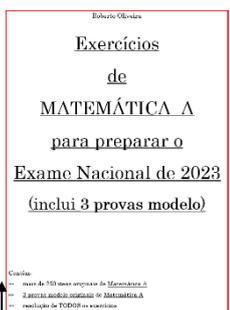
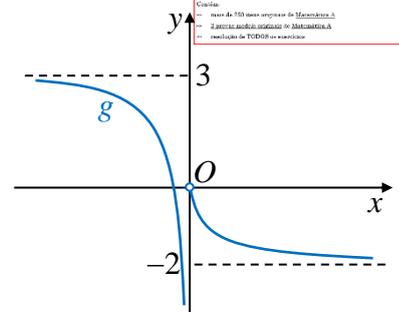
6. Na figura ao lado, está representada parte do gráfico de uma função g , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Tal como sugere essa figura, as retas de equações $x = 0$, $y = -2$ e $y = 3$ são assíntotas ao gráfico da função g .

Seja (a_n) a sucessão de termo geral $a_n = \left(\frac{4-3n}{2-3n} \right)^{3-n^2}$.

A que é igual $\lim g(a_n)$?

- (A) 3 (B) -2 (C) $+\infty$ (D) $-\infty$



7. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{x-4}}{x^2-16} & \text{se } x < 4 \\ -\frac{1}{8} & \text{se } x = 4 \\ \frac{\sqrt{x}-2}{8-2x} & \text{se } x > 4 \end{cases}$.

Sem recorrer à calculadora, estude a continuidade da função f em $x = 4$.

8. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, definida por $h(x) = \frac{e^{2-x}}{2x+1} - 5$.

8.1. Sem recorrer à calculadora, estude o gráfico de h quanto à existência de assíntotas horizontais, indicando as suas equações, caso existam.

8.2. Recorrendo à calculadora gráfica, determine a área do triângulo $[OPQ]$, onde se sabe que:

- P é o ponto de interseção entre o gráfico de h e a reta de equação $y = 3x + 10$;
- Q é o ponto do gráfico de h de abcissa 0.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;
- esboçar o triângulo $[OPQ]$;
- indicar as coordenadas dos pontos P e Q com duas casas decimais (em caso de arredondamentos);
- determinar o valor pedido, arredondado às centésimas.

9. Seja f a função duas vezes diferenciável em \mathbb{R} e tal que $f''(x) = x^3 e^x + 8e^{x-1}$.

Quantos pontos de inflexão tem o gráfico da função f ?

- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

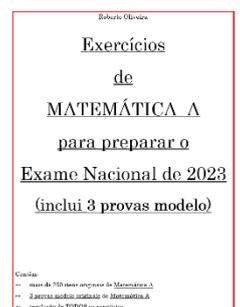
10. Sendo a um número real maior que 1, qual é o valor de $\log_a \left(\sqrt[6]{\frac{1}{a^2}} \right)$?

- (A) $-\sqrt[3]{a}$ (B) $\sqrt[3]{a}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $-\frac{1}{3}$

11. Resolva em \mathbb{R} , sem recorrer à calculadora, as condições seguintes.

11.1. $2e^{x+1} = e^{4x}$

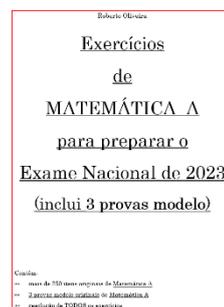
11.2. $5^{2x+1} - 3 \times 5^{-2x} \geq 14$



12. Considere a função f , de domínio $]-\infty, 3[$, definida por $f(x) = (x^2 - 3x)e^{\frac{2x}{3-x}}$.

Sem recorrer à calculadora, estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico, indicando, se existirem, as suas equações.

FIM



COTAÇÕES

Item															
Cotação (em pontos)															
1.	2.	3.	4.1.	4.2.	5.	6.	7.	8.1.	8.2.	9.	10.	11.1.	11.2.	12.	
16	8	8	16	16	16	8	16	16	16	8	8	16	16	16	200

Formulário

Trigonometria

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

Regras de derivação

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + u v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$