Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução do Teste Intermédio de Matemática (v1 2012)

16/05/2012 **9.º Ano**

Nome: ____ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.

a)

Idades dos alunos da turma A

A alternativa correta é a **C** ($p \in \left]\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right[$).

Escolhido ao acaso um aluno da turma A, a probabilidade de ele ter 15 anos é $p = f_r(15 \text{ anos}) = 67\% = 0{,}67$. Logo, $p \in \left]0{,}5;0{,}75\right[$.

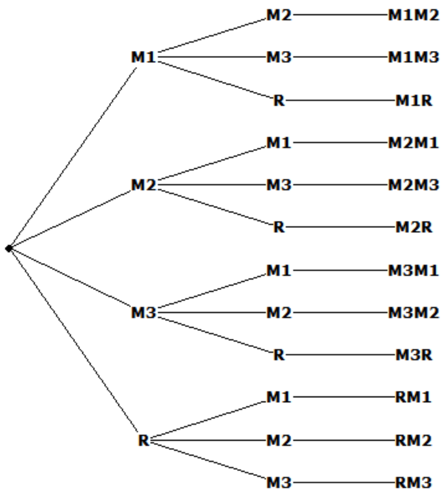
b)

Turma B

	14 anos	15 anos	16 anos
Raparigas	9	3	4
Rapazes	6	1	3

Como a expressão $\frac{9\times 14+3\times 15+4\times 16}{n}$ representa a média das idades das raparigas da turma B, então o valor de n é 16, pois o número de raparigas da turma B é $9+3+4=16$.

c)



Na turma B, há 4 alunos com 15 anos:
3 raparigas (M_1 , M_2 e M_3) e 1 rapaz (R).

Como não interessa a ordem pela qual esses dois alunos são escolhidos, os resultados possíveis são:
$\{M_1,M_2\}$, $\{M_1,M_3\}$, $\{M_2,M_3\}$, $\{M_1,R\}$, $\{M_2,R\}$ e $\{M_3,R\}$.

Assim, o número de casos possíveis é $NCP = 6$ e o número de casos favoráveis é $NCF = 3$.

Logo, a probabilidade de os dois alunos escolhidos serem do mesmo sexo é $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Em **alternativa**, poderia recorrer-se a uma tabela de dupla entrada ou a um diagrama de árvore, considerando que esses dois alunos eram escolhidos um a seguir ao outro.
Nesta situação, ainda que o número de casos possíveis e favoráveis duplicasse, obtinha-se ainda o mesmo valor para a probabilidade pedida.

2.

A alternativa correta é a **D** ($-3{,}14 \in A$).
Note que $-\pi = -3{,}14159265\ldots$ (dízima infinita não periódica).

3.

Ora, $\left(\frac{1}{9}\right)^4 = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^8 = 3^{-8}$.

Logo, para que a expressão 3^k seja igual a $\left(\frac{1}{9}\right)^4$, o número k é -8 .

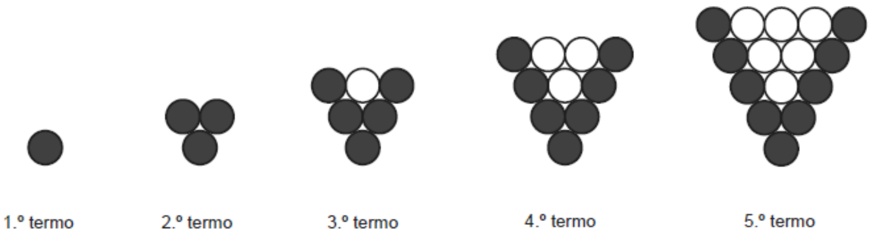
4.

Em cada termo, o número de círculos é igual à soma dos n primeiros números naturais: o primeiro termo (para $n=1$) é formado por 1 círculo; o segundo termo (para $n=2$) é formado por $1+2=3$ círculos; o terceiro termo (para $n=3$) é formado por $1+2+3=6$ círculos; e assim sucessivamente.

Logo, é o 100.º termo dessa sequência que tem um número total de círculos ($1+2+3+...+99+100$) igual à soma dos cem primeiros números naturais.

Por outro lado, em cada termo, o número de círculos pretos é igual ao dobro da ordem do termo decrescido de uma unidade, isto é, o número de círculos pretos do termo de ordem n é dado pela expressão $2n-1$.

Assim, o centésimo termo tem $2\times 100-1=199$ círculos pretos.



5.

$$\frac{(x-1)^2}{6}-\frac{2x+1}{3}=1 \Leftrightarrow \underset{(1)}{\frac{x^2-2x+1}{6}}-\underset{(2)}{\frac{2x+1}{3}}=\underset{(6)}{1}$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1-4x-2=6$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x-7=0$$

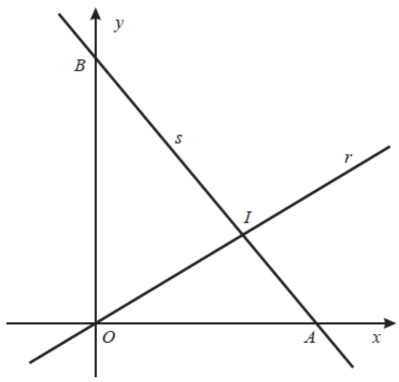
$$\Leftrightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\times 1\times(-7)}}{2\times 1}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36+28}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{6\pm 8}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \quad \vee \quad x=7$$

6.



a)

A ordenada do ponto B é $4,5$, pois é o valor do parâmetro b (ordenada na origem) da equação da forma $y=kx+b$ relativa à reta $s: y=-1,2x+4,5$.

Em **alternativa**, pode ser calculada determinando o valor de y correspondente a $x=0$: $y=-1,2\times 0+4,5 \Leftrightarrow y=4,5$. Isto é, como o ponto B tem coordenadas $(0;4,5)$, então a ordenada de B é $4,5$.

b)

A alternativa correta é a **B** ($3,75$).

Comecemos por determinar a abcissa do ponto A, que tem ordenada 0:

$0=-1,2x+4,5 \Leftrightarrow x=\frac{4,5}{1,2} \Leftrightarrow x=3,75$. Logo, $\overline{OA}=3,75$.

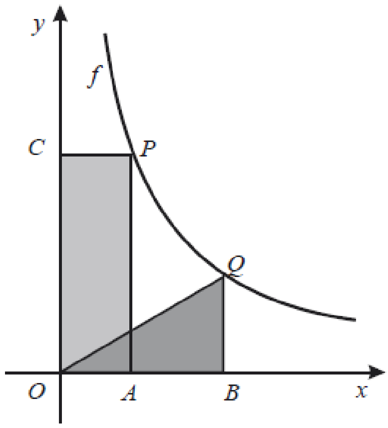
c)

$$\begin{cases} y=0,6x \\ y=-1,2x+4,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0,6x \\ 0,6x=-1,2x+4,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0,6x \\ 1,8x=4,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0,6x \\ x=\frac{4,5}{1,8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2,5 \\ y=0,6\times 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2,5 \\ y=1,5 \end{cases}$$

Portanto, $I(2,5;1,5)$.

7.

a)



A alternativa correta é a **B** (10).

O ponto P tem coordenadas (x, y), que verificam a relação $y = \frac{10}{x}$, pois esse ponto pertence ao gráfico da função f.

Por outro lado, a área do retângulo [OAPC] é dada por:

$A_{[OAPC]} = \overline{OA} \times \overline{AP} = x \times y$, pois $\overline{OA} = x$ e $\overline{AP} = y$.

Como $y = \frac{10}{x} \Leftrightarrow yx = 10$, então $A_{[OAPC]} = \overline{OA} \times \overline{AP} = x \times y = 10$.

b)

Se $\overline{OB} = 4$, então a abcissa de B e de Q é 4.

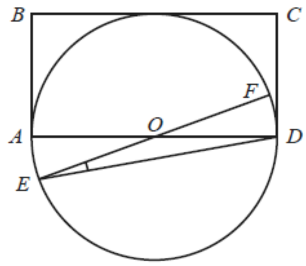
Determinemos a ordenada de Q: $y = \frac{10}{4} \Leftrightarrow y = \frac{5}{2} \Leftrightarrow y = 2{,}5$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo [OBQ], temos:

$$\overline{OQ} = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{BQ}^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{89}{4}} = \frac{\sqrt{89}}{2}.$$

Logo, o perímetro pedido é: $P_{[OBQ]} = \overline{OB} + \overline{BQ} + \overline{OQ} = 4 + 2{,}5 + \frac{\sqrt{89}}{2} \approx 11{,}2$, arredondado às décimas.

8.



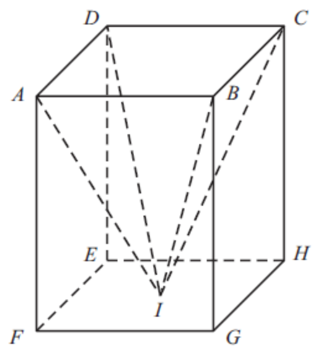
a) Seja r, em centímetros, o comprimento do raio da circunferência.
De acordo com os dados, $\overline{AD} = \overline{BC} = 2r$ e $\overline{AB} = \overline{CD} = r$.
Logo, $P_{[ABCD]} = 2r + 2r + r + r = 6r$.
Como o perímetro do retângulo é 30 cm, temos:
$P_{[ABCD]} = 6r \Leftrightarrow 30 = 6r \Leftrightarrow r = 5$ (em cm).
Logo, o comprimento da circunferência é $P_{\bigcirc} = 2\pi \times 5 = 10\pi \approx 31{,}4$ centímetros.

b) Como a amplitude de um ângulo inscrito numa circunferência é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, temos: $\overset{\frown}{FD} = 2 \times D\hat{E}F = 2 \times 10° = 20°$.
Assim, $\overset{\frown}{FA} = \overset{\frown}{DA} - \overset{\frown}{FD} = 180° - 20° = 160°$.
Logo, a rotação de centro O que transforma o ponto F no ponto A tem $160°$ (ou $-200°$) de amplitude.

c)

A alternativa correta é a **B**.
O ponto O pertence à mediatriz do segmento de reta [ED], pois o ponto O é equidistante dos extremos do segmento, visto que $\overline{OE} = \overline{OD}$, já que [OE] e [OD] são raios da mesma circunferência.

9.



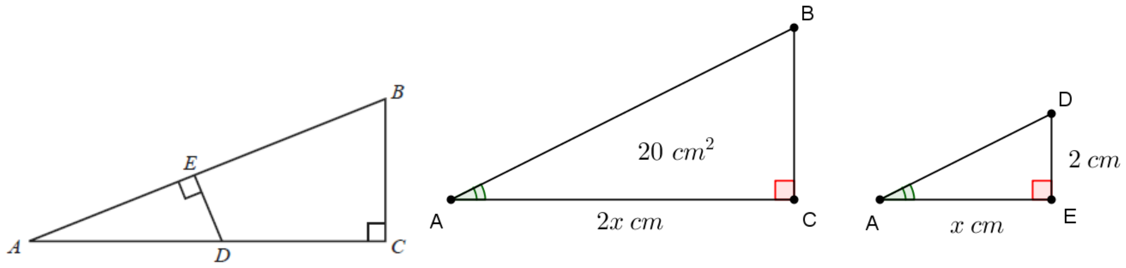
O sólido que se obtém depois de retirada a pirâmide tem $V = 27 - 9 = 18$ cm^3 de volume.

Como se sabe, as expressões $V_{\text{Prisma}} = A_b \times h$ e $V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} A_b \times h$ traduzem o volume do prisma e da pirâmide, respetivamente, em função das suas áreas da base e alturas.

Ora, como o prisma e a pirâmide em questão possuem iguais bases e iguais alturas, então o volume da pirâmide é a terça parte do volume do prisma:

$V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} V_{\text{Prisma}} = \frac{1}{3} \times 27 = 9$ cm^3.

10.



Os triângulos [ABC] e [AED] são semelhantes, pois ambos possuem um ângulo reto e um ângulo agudo (EAD) é comum.

Assim, os lados correspondentes destes triângulos têm comprimentos diretamente proporcionais, isto é:
$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$.

Tomando as duas primeiras razões, temos: $\frac{2}{1} = \frac{\overline{BC}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = 4$.

Como $A_{[ABC]} = 20\ \text{cm}^2$, vem: $\frac{\overline{AC} \times 4}{2} = 20 \Leftrightarrow \overline{AC} = 10$.

Portanto, $\overline{AC} = 10$ cm.

FIM