



www.esffranco.edu.pt

(2022/2023)

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 3

2.º Período

09/02/2023

Duração: 90 minutos

Nome: _____

N.º: _____

Classificação:

O professor: _____

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Dado $x \neq 0$, qual é o termo independente no desenvolvimento de $(x + \frac{1}{x})^{20}$?
(A) 184 756 (B) 205 530 (C) 125 970 (D) 167 960

2. Em 2020, houve milhares de portugueses que emigraram.

- 2.1. De todos os portugueses que emigraram em 2020, sabe-se que:

- 28% emigraram para o Brasil;
- 2 em cada 3 emigrantes eram homens;
- dos que não emigraram para o Brasil, 15% eram mulheres.

Escolheu-se, ao acaso, um emigrante do género feminino.

Determine a probabilidade de ele ter emigrado para o Brasil.

Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

- 2.2. Na sala de embarque de um determinado aeroporto, estão 32 pessoas que vão para o Brasil e 14 pessoas que vão para o Reino Unido.

Escolhe-se, ao acaso, quatro dessas pessoas.

Qual é a probabilidade, na forma de dízima com arredondamentos às centésimas, de pelo menos três deles irem para o Brasil?

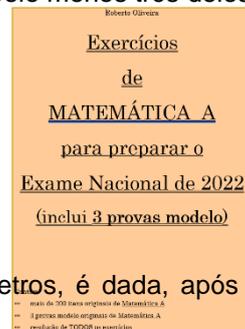
- (A) 0,65 (B) 0,25 (C) 0,35 (D) 0,55



3. Um ponto P desloca-se sobre uma reta numérica de tal forma que a sua abcissa, em metros, é dada, após t segundos, por:

$$x(t) = 1 + 36t + 3t^2 - 2t^3$$

Sem recorrer à calculadora, calcule, em metros, a abcissa máxima do ponto P .



4. Considere a função f , diferenciável em \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = \sqrt{2x^3 + 2x} - 3x$.

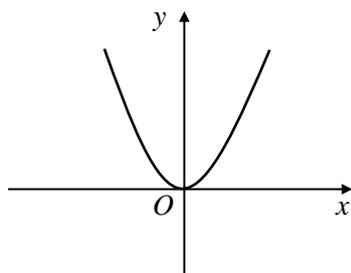
Seja a o minimizante de f , pode concluir-se que:

- (A) $\frac{\sqrt{2a^3+2a}}{3a^2+1} = 3$ (B) $\frac{3a^2+1}{\sqrt{2a^3+2a}} = 6a^2$ (C) $\frac{3a^2+1}{\sqrt{2a^3+2a}} = 3$ (D) $\frac{\sqrt{2a^3+2a}}{3a^2+1} = 6a^2$

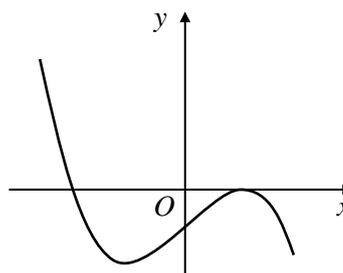
5. Considere a função g , duas vezes diferenciável em \mathbb{R} , e cujo gráfico tem apenas um ponto de inflexão.

Em qual das seguintes opções pode estar representada parte do gráfico da função " g ", segunda derivada de g ?

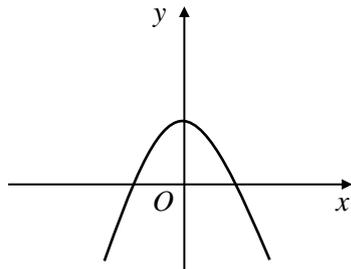
(A)



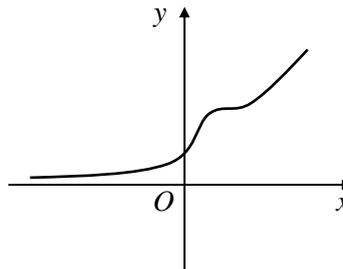
(B)



(C)



(D)



6. Seja f uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e tal que $f'(x) = \frac{x^4}{x+2}$.

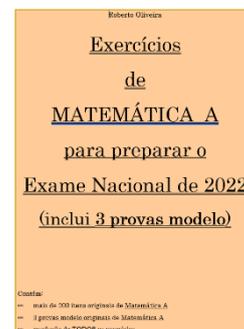
Estude a função f quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico, indicando:

- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima;
- a(s) abscissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f , se existirem.

7. Considere o número real a tal que $\sin a = \frac{1}{3} \wedge a \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Qual é o valor de $\cos\left(a + \frac{11\pi}{6}\right)$?

- (A) $4\sqrt{3} - 6$ (B) $6 - 4\sqrt{3}$ (C) $\frac{2\sqrt{6}+1}{6}$ (D) $-\frac{2\sqrt{6}+1}{6}$



8. De um certo número real $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$, sabe-se que $\cos(4\alpha) = -\frac{1}{9}$.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de $\operatorname{tg}(2\alpha + \pi)$.

9. Resolva, em \mathbb{R} , a equação $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \frac{\pi}{10}$.

10. Considere a função g , de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = \begin{cases} \frac{16 \operatorname{sen} \frac{x}{4}}{3x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{4}{3} & \text{se } x = 0 \\ \frac{x^2 + 4x}{3x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

Resolva os itens 10.1. e 10.2. sem recorrer à calculadora.

10.1. Estude a continuidade da função g em $x = 0$.

10.2. Resolva, em $] -2\pi, 0[$, a equação $g(x) \times \cos \frac{x}{4} = -\frac{4}{3x}$.

10.3. Considere agora a função h , de domínio $[0, 6]$, definida por $h(x) = 4 \cos x$.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine a área do triângulo $[ABC]$, onde se sabe que:

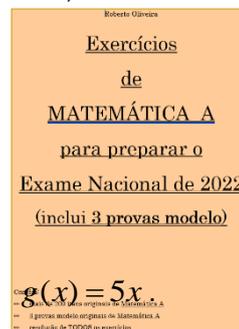
- A e B são os pontos de interseção entre os gráficos de g e h , sendo A com a abcissa menor;
- C é o ponto do eixo Ox de abcissa igual à de B .

Na sua resposta, deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;
- esboçar o triângulo $[ABC]$;
- indicar as coordenadas dos pontos A , B e C , sempre que possível, com duas casas decimais;
- determinar o valor pedido, arredondado às décimas.

11. Sejam f e g as funções, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{10}\right]$, definidas respetivamente por $f(x) = \operatorname{tg}(x + \pi)$ e $g(x) = 5x$.

Estude a função $f \circ g$, também de domínio $\left[0, \frac{\pi}{10}\right]$, quanto à existência de assíntotas do seu gráfico, indicando, se existirem, as suas equações.



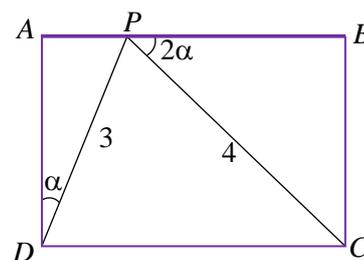
12. Considere o retângulo $[ABCD]$ e um ponto P do segmento $[AB]$.

Seja $\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[$ o ângulo de amplitude ADP e 2α o ângulo de amplitude BPC .

Sabe-se que:

- $\overline{PC} = 4$;
- $\overline{PD} = 3$.

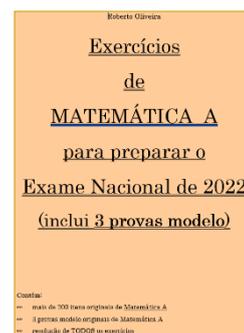
Mostre que o comprimento de $[AB]$ é dado, para cada valor de α , pela expressão $4 + 3\sin \alpha - 8\sin^2 \alpha$



13. Considere a função g , de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = \begin{cases} 3 \cos\left(\frac{2x-2k+\pi}{2}\right) & \text{se } x \neq k, \text{ com } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \\ 4 & \text{se } x = k \end{cases}$

Determine k de modo que g seja contínua em \mathbb{R} .

FIM



COTAÇÕES

Item																
Cotação (em pontos)																
1.	2.1.	2.2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.1.	10.2.	10.3.	11.	12.	13.	200
8	13	8	13	8	8	17	8	17	14	17	14	14	13	14	14	

Formulário

Trigonometria

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Regras de derivação

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$