



[www.esffranco.edu.pt](http://www.esffranco.edu.pt)

(2022/2023)

# 4.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 4

2.º Período

20/03/2023

Duração: 100 minutos

Nome: \_\_\_\_\_

N.º: \_\_\_\_\_

Classificação:

O professor: \_\_\_\_\_

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleccione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura, está representada, num referencial o.n.  $xOy$ , uma circunferência centrada na origem do referencial.

Considere todos os pontos assinalados na figura: interseção da circunferência com os eixos coordenados e com as bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares.

Escolhe-se, ao acaso, dois desses pontos.

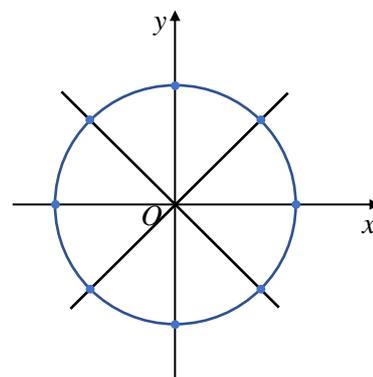
Qual é a probabilidade de esses pontos terem abcissas positivas?

(A)  $\frac{1}{12}$

(B)  $\frac{3}{8}$

(C)  $\frac{1}{28}$

(D)  $\frac{3}{28}$



2. Considere todos os números naturais de oito algarismos que se podem escrever utilizando três algarismos 1, quatro algarismos 4 e um algarismo 6.

Determine quantos destes números são pares e superior a 30 milhões.

3. Na figura ao lado, está o gráfico da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ .

Sabe-se que o gráfico de  $f$  tem apenas duas assíntotas, de equações  $y = -1$  e  $y = x + 1$ .

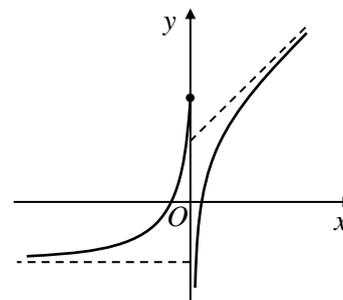
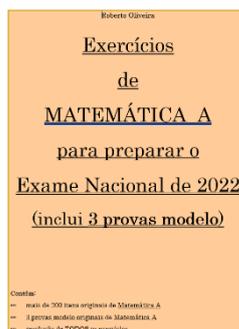
Qual é a proposição falsa?

(A)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

(B)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 1$

(C)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

(D)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$



4. Considere a função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}^-$ , definida por  $g(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{k}{x}\right)$ , sendo  $k$  um número inteiro diferente de 0. Qual das seguintes pode ser a equação da assíntota do gráfico de  $g$ , paralela ao eixo das abcissas?

- (A)  $x = \frac{\pi}{4}$                       (B)  $x = -3$                       (C)  $y = -\frac{2}{3}$                       (D)  $y = 2$

5. Seja  $h$  a função, de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , definida por  $h(x) = \frac{\cos x}{x}$ .

Considere a reta  $t$ , tangente ao gráfico de  $h$  no ponto de abscissa  $\pi$ .

Determine, sem recorrer à calculadora, as coordenadas do ponto de interseção de  $t$  com o eixo  $Oy$ .

6. Considere a função  $f$ , de domínio  $\left] \frac{\pi}{4}, \pi \right[$ , definida por  $f(x) = \operatorname{sen}(2x) + x^2$ .

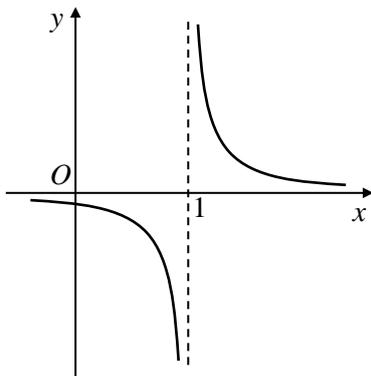
Estude a função  $f$  quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico, indicando as suas coordenadas, caso existam.

7. Seja  $(u_n)$  a sucessão definida por  $u_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^n$ .

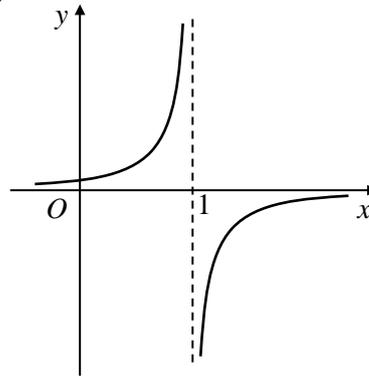
De uma certa função  $f$ , sabe-se que  $\lim f(u_n) = -\infty$ .

Em qual das seguintes opções pode estar representada parte do gráfico da função  $f$ ?

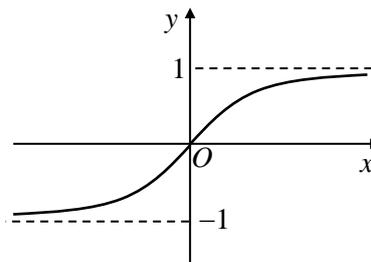
(A)



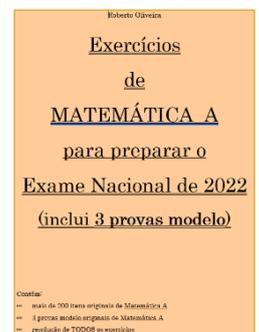
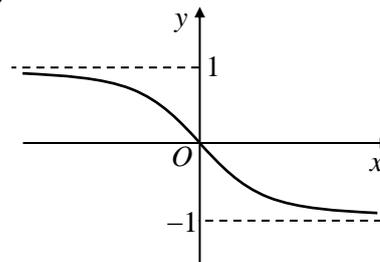
(B)



(C)



(D)



8. Considere a função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-2} + x^2 - 5}{2-x} & \text{se } x < 2 \\ -1 & \text{se } x = 2. \\ 1 - \log_3(x+7) & \text{se } x > 2 \end{cases}$

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora (exceto para cálculos numéricos).

8.1. Estude a continuidade da função  $g$  em  $x = 2$ .

8.2. Mostre que a função  $g$  tem pelo menos um zero em  $] -3, 0[$ .

Se usar cálculos intermédios, considere, pelo menos, duas casas decimais.

8.3. Resolva, em  $]2, +\infty[$ , a equação  $g(x) = \log_3(x-7)$ .

9. Para certos valores de  $a$  e de  $b$  ( $a > 1$  e  $b > 1$ ), tem-se  $\ln b = 5 \ln a$ .

Qual é, para esses valores de  $a$  e de  $b$ , o valor de  $\log_a\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)$ ?

(A)  $\frac{5}{2}$

(B)  $\frac{5}{3}$

(C)  $-\frac{1}{2}$

(D)  $-\frac{3}{2}$

10. Seja  $h$  a função, de domínio  $[0, 2\pi]$ , definida por  $h(x) = 4 \sin\left(\frac{x}{4}\right)$ .

Na figura está representado, em referencial o.n.  $xOy$ , o gráfico da função  $h$ .

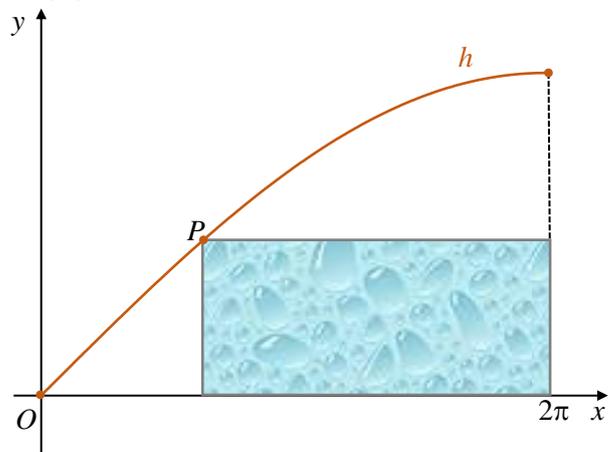
Considere que um ponto  $P$  se desloca ao longo do gráfico de  $h$ .

Para cada posição do ponto  $P$ , considere o retângulo em que um dos lados está contido no eixo  $Ox$ , outro na reta de equação  $x = 2\pi$  e os outros dois nas retas vertical e horizontal que passam pelo ponto  $P$ .

Exprima a área do retângulo em função da abscissa de  $P$ , e, recorrendo à calculadora gráfica, determine a abscissa de  $P$  (aproximada às centésimas) para a qual a área do retângulo é máxima.

Apresente os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente:

- o(s) gráfico(s) obtido(s);
- o ponto de ordenada máxima e respetivas coordenadas, com arredondamento às centésimas.



11. Resolva, sem recorrer à calculadora, as condições seguintes.

11.1.  $(e^x + 3) \ln(3-x) + e^x \ln(x-1) = \ln \frac{1}{(x-1)^3}$

11.2.  $3(3^{2x-1} - 1) \geq 10 \times 3^{-2x}$

Roberto Oliveira

**Exercícios**

de

**MATEMÁTICA A**

para preparar o

**Exame Nacional de 2022**

(inclui 3 provas modelo)

Contém:

- mais de 700 itens originais de Matemática A
- 4 provas modelo organizadas em Matemática A
- resolução de TODOS os exercícios.

12. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = \log_2(x)$ .

Seja  $a \in \mathbb{R}^+$  tal que  $a > 1$ .

Sejam  $A$  e  $B$  os pontos do gráfico de  $f$  de abscissas 3 e  $3a$ , respetivamente.

Prove que o declive da reta  $AB$  é dado pela expressão  $\frac{\log_8(a)}{a-1}$ .

FIM

### COTAÇÕES

Item															
Cotação (em pontos)															
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.1.	8.2.	8.3.	9.	10.	11.1.	11.2.	12.	200
8	17	8	8	13	19	8	17	13	17	8	13	17	17	17	

## Formulário

### Trigonometria

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

### Limites notáveis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

### Regras de derivação

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

