



www.esffranco.edu.pt

(2022/2023)

2.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 3

1.º Período

12/12/2022

Duração: 90 minutos

Nome: _____

N.º: _____

Classificação:

O professor: _____

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleccione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Pode resolver o item 1.3. ou o item 3.2.

1. Considere uma dada biblioteca.

1.1. Nessa biblioteca, sabe-se que:

- 80% dos livros são de autores estrangeiros (os outros são de autores portugueses);
- 30% dos livros são romances;
- 70% dos livros de autores portugueses não são romances.

Escolhe-se, ao acaso, um livro qualquer da biblioteca.

Considere os acontecimentos seguintes.

E : «O livro é de um autor estrangeiro.»

R : «O livro é de um romance.»

Averigue se os acontecimentos E e R são independentes.

1.2. Para uma certa promoção, vão ser colocados, numa prateleira, 10 livros diferentes: 4 de autores europeus, 4 de autores americanos e 2 de autores asiáticos.

Se esses livros forem colocados ao acaso, qual é a probabilidade de os autores do mesmo continente ficarem juntos?

- (A) $\frac{1}{1050}$ (B) $\frac{1}{525}$ (C) $\frac{1}{3150}$ (D) $\frac{1}{1575}$

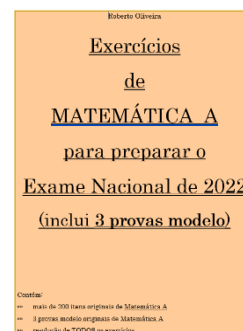
1.3. Num saco, estão n livros para serem arrumados, sendo metade romances.

Tiram-se, ao acaso, dois livros do saco.

Sabendo que a probabilidade de ambos serem romances é igual a $\frac{4}{17}$, determine n .

Para resolver este problema, percorra as seguintes etapas:

- equacione o problema;
- resolva a equação.



2. 2.1. Seja Ω , conjunto finito, o espaço amostral associado a uma dada experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(B) \neq 0$;
- os acontecimentos B e $A|B$ são equiprováveis.

Mostre que $P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + [P(B)]^2$.

- 2.2. Para analisar a produtividade numa empresa, fez-se um estudo sobre os trabalhadores com mais de 30 anos e os trabalhadores que chegam atrasados à empresa, tendo-se constatado que:

- 14% dos trabalhadores chegam atrasados à empresa;
- o número de trabalhadores com mais de 30 anos é igual ao número de trabalhadores que chegam atrasados se tiverem mais de 30 anos;
- 90% dos trabalhadores têm mais de 30 anos ou chegam a horas à empresa.

Escolhe-se, ao acaso, um trabalhador com mais de 30 anos.

Determine a probabilidade de ele chegar atrasado à empresa.

Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

Nota: Se o desejar, utilize a igualdade referida em 2.1.. Neste caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B , no contexto da situação apresentada.

Pode resolver o item 3.2. ou o item 1.3.

3. Dado um número real k , considere a função f , contínua em \mathbb{R} , definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{5x+k}{\sqrt{4x^2+13}} & \text{se } x \leq 3 \\ \frac{\sqrt{x+1}-2}{3x-x^2} & \text{se } x > 3 \end{cases}$.

Sem usar a calculadora (exceto para cálculos numéricos), resolva as alíneas seguintes.

- 3.1. Quando $x \rightarrow -\infty$, o gráfico de f admite uma assíntota paralela ao eixo Ox .

Escreva uma equação dessa assíntota.

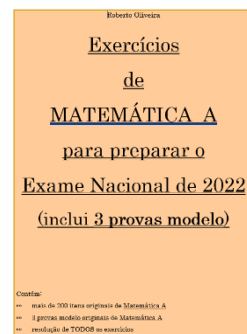
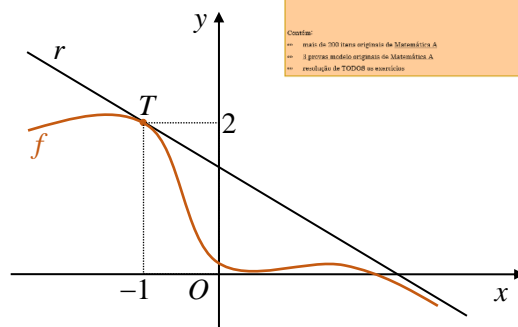
- 3.2. Determine o valor de k .

4. Na figura ao lado, encontra-se o gráfico da função f , diferenciável em \mathbb{R} , e a reta r .

Tal como sugere a figura, r é tangente ao gráfico de f no ponto $T(-1,2)$ e é a assíntota do gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

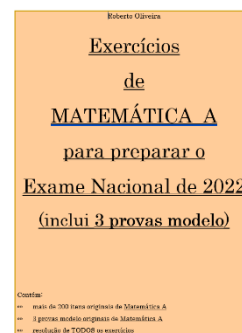
Qual é a proposição verdadeira?

- (A) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-2}{x^2+x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
- (B) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-2}{x^2+x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
- (C) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- (D) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



5. Considere a função g , diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, definida por $g(x) = \frac{3}{x+1}$.
- 5.1. O gráfico da função g interseca a reta de equação $y = 8 - 2x$ num ponto em $[0, 5]$.
Utilizando a calculadora gráfica, determine a distância desse ponto à origem do referencial.
Na sua resposta:
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
 - indique as coordenadas do ponto de interseção com arredondamentos às centésimas;
 - apresente a distância pedida arredondada às décimas.
- 5.2. O Teorema de Bolzano-Cauchy permite-nos afirmar que existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função g tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive -1 no intervalo:
- (A) $] -1, 1[$ (B) $] -5, -3[$ (C) $] -3, 0[$ (D) $] -3, -2[$

6. Seja f a função, diferenciável em \mathbb{R} , definida por $f(x) = x^3 - 8$.
- 6.1. Mostre, usando a definição de derivada num ponto, que $f'(1) = 3$.
- 6.2. Em qual das opções a seguir está uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1?
- (A) $y = 3x - 8$ (B) $y = 3x + 8$ (C) $3x - y = 10$ (D) $3x + y = 10$
- 6.3. Considere agora a função g , de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = [f(x)]^4$.
Sem usar a calculadora (exceto para cálculos numéricos), estude a função g quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.
Na sua resposta, deve apresentar:
- o(s) intervalo(s) em que a função g é crescente;
 - o(s) intervalo(s) em que a função g é decrescente;
 - os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos, caso existam.



7. O número de dadores de sangue numa pequena cidade foi dado, em dezenas de pessoas, t anos após o final de 2015, pela função definida por
- $$d(t) = 100 + 2t - \frac{2}{5}t^2 - \frac{1}{6}t^3, \text{ com } 0 \leq t \leq 6.$$
- 7.1. Em média, de quanto foi a diminuição de dadores de sangue, por ano, nessa cidade, entre o final de 2015 e o final de 2018?
- (A) 10 (B) 7 (C) 14 (D) 20
- 7.2. Calcule, analiticamente, $d'(4)$.
Interprete o resultado no contexto do problema.

8. Considere duas funções f e g , de domínio \mathbb{R}^+ .

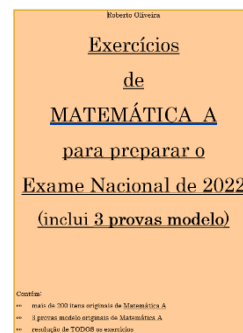
Sabe-se que:

• a reta de equação $y = 5 - 3x$ é uma assíntota ao gráfico de f ;

• $g(x) = \frac{f(x) + \cos x - 3x^3}{x}$.

Prove que o gráfico de g não tem assíntotas oblíquas.

FIM



COTAÇÕES

Item																
Cotação (em pontos)																
1.1.	1.2.	1.3.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	4.	5.1.	5.2.	6.1.	6.2.	6.3.	7.1.	7.2.	8.	
16	8	16	16	16	16	16	8	16	8	16	8	20	8	12	16	216

Formulário

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$